§3 GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

Soit

$$\mathbb{H} := \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0 \}$$

le démi-plan supérieur de $\mathbb{C}$

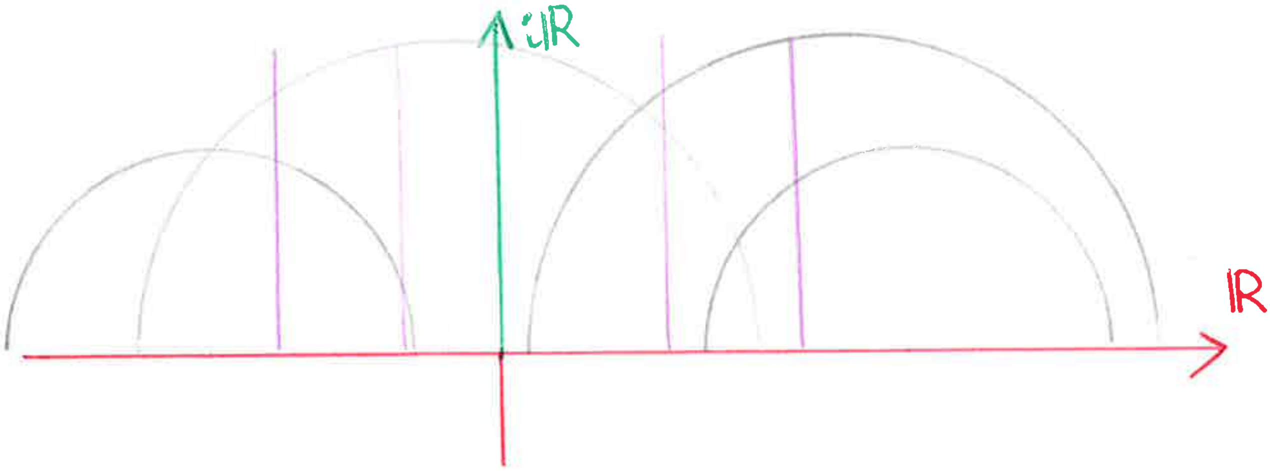
Définition. Les points hyperboliques de $\mathbb{H}$ sont de points de $\mathbb{H}$.

Définition. Les droites hyperboliques de $\mathbb{H}$ sont de sous-ensembles suivants de $\mathbb{H}$:

$$l_{a,\infty} := \mathbb{H} \cap \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z = a \} \text{ pour tous } a \in \mathbb{R},$$

$$l(a,r) = l_{a-r,a+r} = \mathbb{H} \cap \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = r \}$$

pour toute paire $(a,r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{>0}$.



Remarque. Le cercle $\{ z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = r \}$ avec $a \in \mathbb{R}$ est perpendiculaire à l'axe réel $\mathbb{R}$.

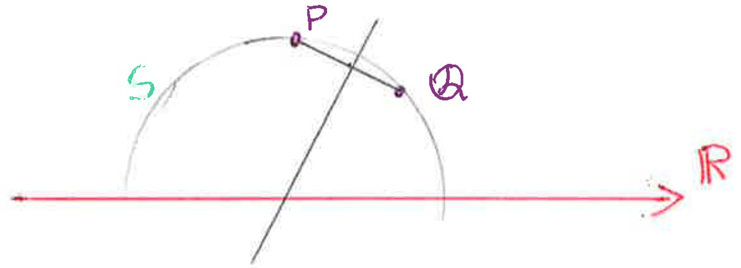
De même la droite $\{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z = a \} \perp \mathbb{R}$.

Proposition 1. (Postulat 1 et unicité) Par deux points de $\mathbb{H}$ passe une et une seule droite hyperbolique.

Preuve. Soient $P, Q \in H$ et $P \neq Q$. On a deux cas.

i) $\operatorname{Re} P = \operatorname{Re} Q$. Alors la droite hyperbolique $l_{\alpha,\infty}$ où $\alpha = \operatorname{Re} P$, passe par P et Q.

ii) $\operatorname{Re} P \neq \operatorname{Re} Q$



Soit $[P, Q]$ le segment euclidien et soit $L_{P,Q}$ la droite euclidien $\perp$ à $[P,Q]$ au point $\frac{1}{2}(P+Q)$. Alors $L_{P,Q}$ coupe l'axe réel $\mathbb{R}$ en un point euclidien $a \in \mathbb{R}$. Le cercle euclidien S de centre a et rayon $r = |P-a| = |Q-a|$ est $\perp$ à l'axe $\mathbb{R}$ et passe par P et Q, donc la droite hyperbolique $l(a,r)$ passe par P et Q.

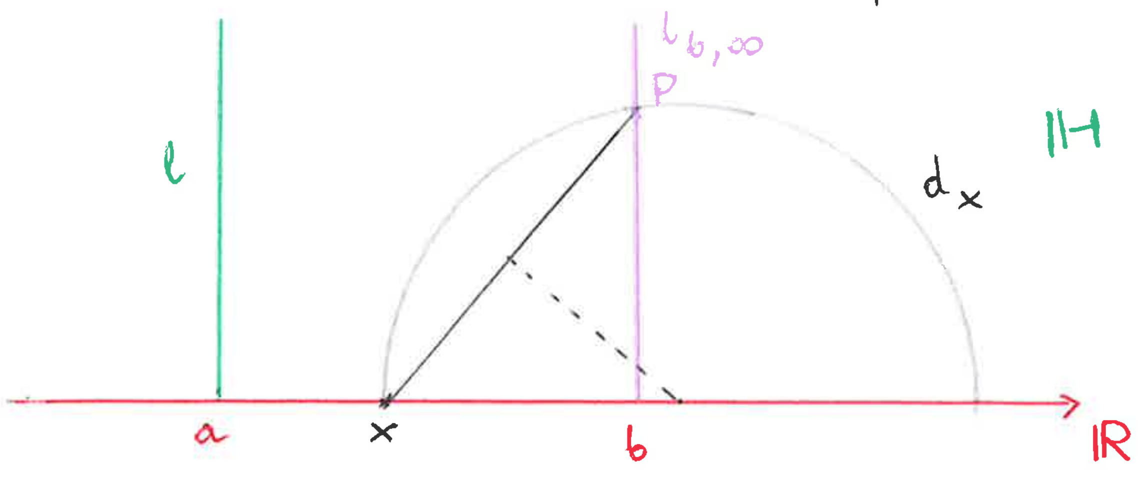
L'unicité est dû au fait que des droites et cercles euclidiens avec ces propriétés sont uniques. $\blacksquare$

Définition. Deux droites hyperboliques de $\mathbb{H}$ sont dit parallèles si elles sont disjointes.

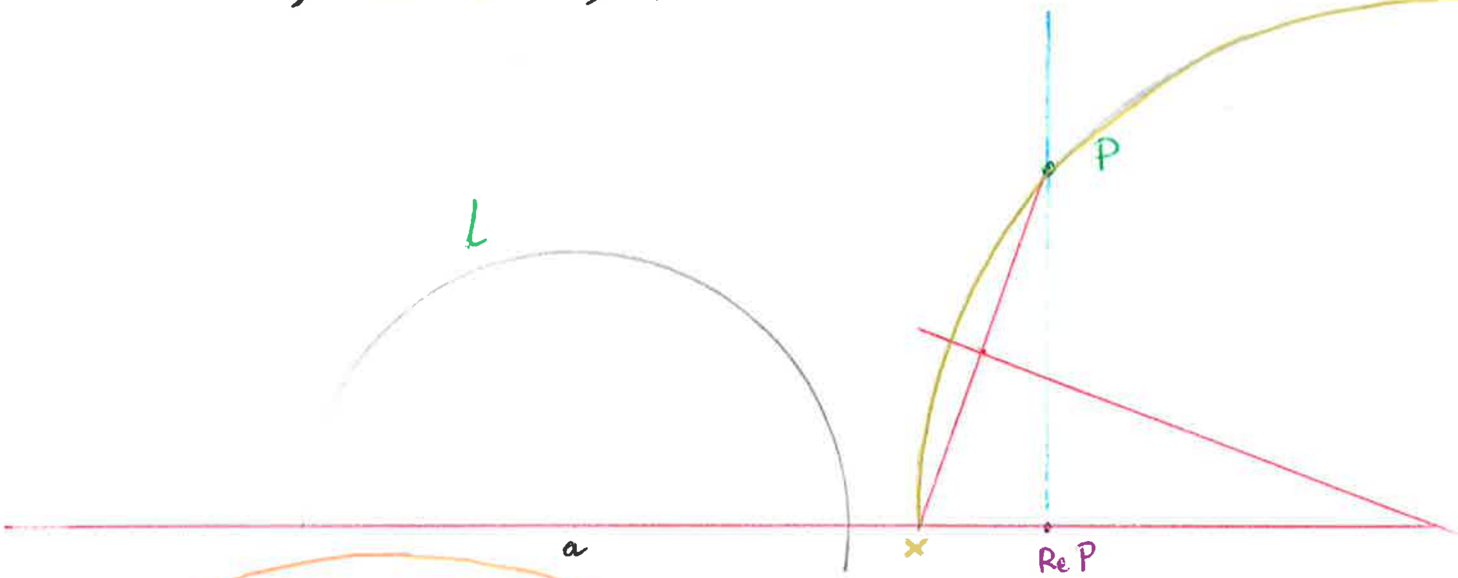
Proposition 2 (Postulat 5 hyperbolique)

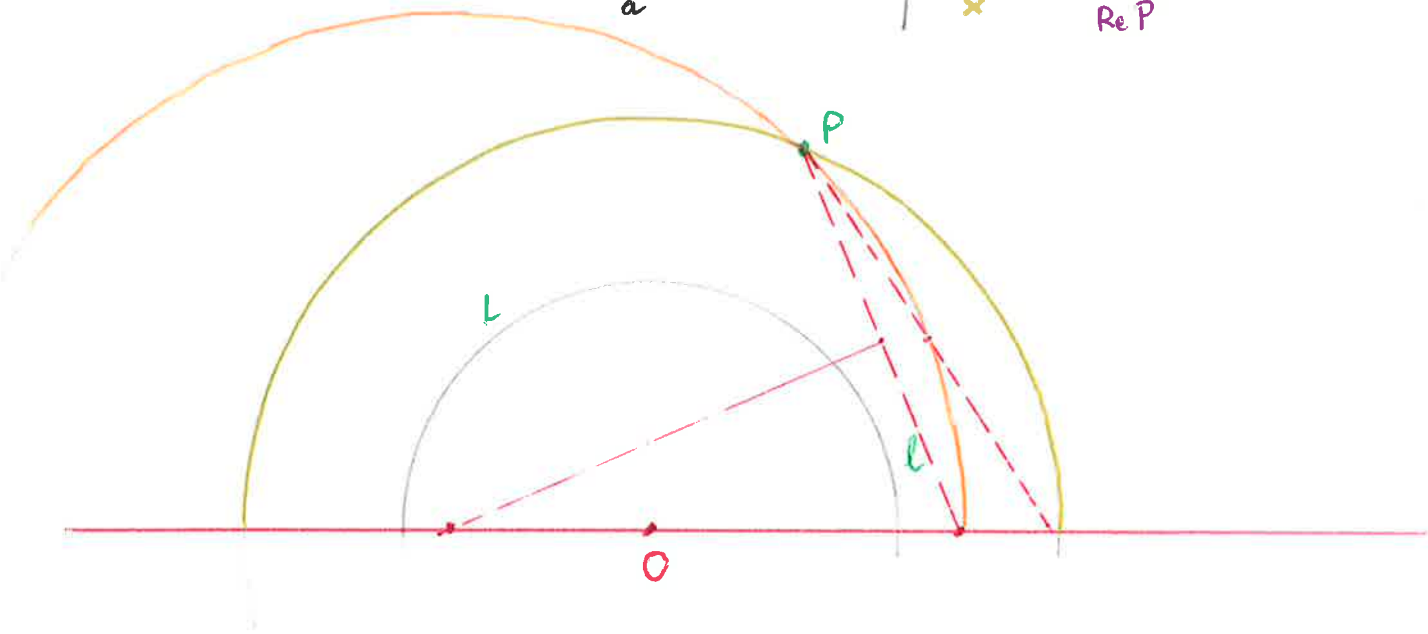
Soit l une droite hyperbolique de $\mathbb{H}$ et soit $P \in \mathbb{H}$ un point de $\mathbb{H}$ tel que $P \notin l$. Alors il existe une infinité des droites hyperboliques distinctes, passant par P et parallèles à l.

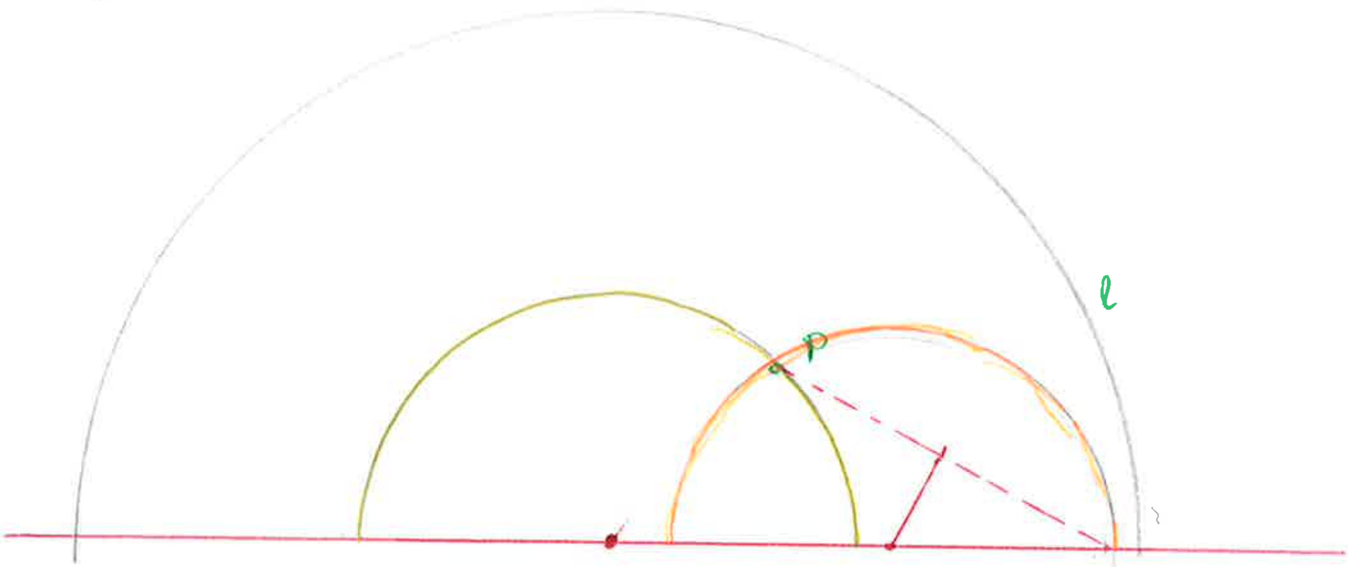
Preuve. Soit $l = l_{a,\infty}$ et soit $P \notin l_{a,\infty}$. Alors $b = \mathrm{Re}\, P \neq a$. La droite hyp. $l_{b,\infty}$ est disjointe avec l, donc $l_{b,\infty} \parallel l$ et $P \in l_{b,\infty}$.



Soit $x \in \mathbb{R}$, $a < x < b$. Alors la droite hyp. d_x est aussi disjointe avec ℓ, donc $d_x \parallel \ell$ et $P \in d_x$.







On pose $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et

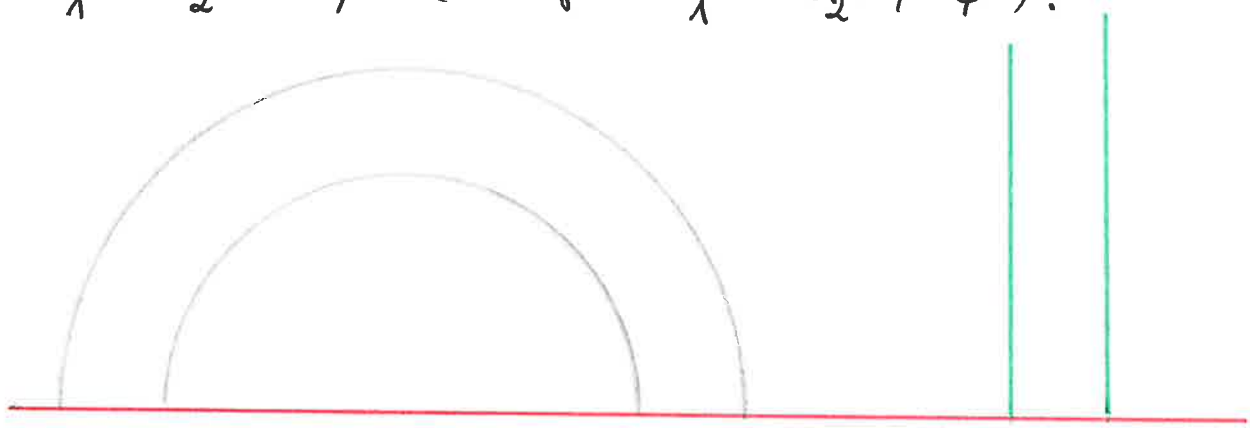
$$\overline{\mathbb{H}} := \mathbb{H} \cup \overline{\mathbb{R}} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geqslant 0 \} \cup \{\infty\}.$$

On pose

$$\overline{l}_{a,\infty} := l_{a,\infty} \cup \{a, \infty\},$$

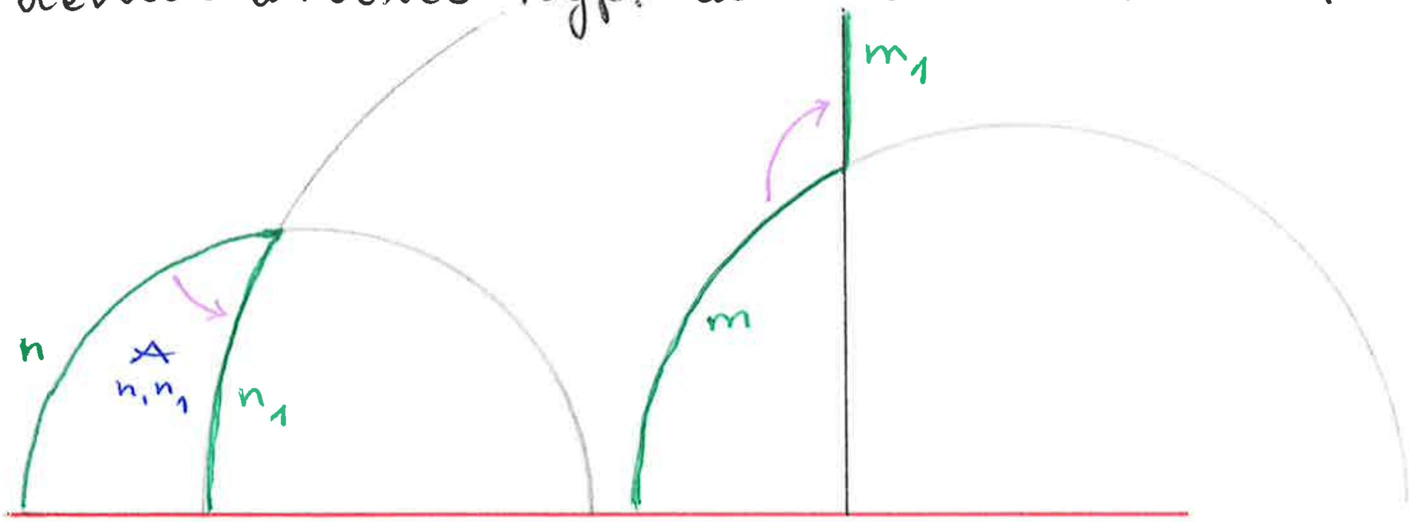
$$\overline{l}(a,r) := l(a,r) \cup \{a-r, a+r\} = \overline{\mathbb{H}} \cap \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = r \}.$$

Définition. On dit que des droites hyp. parallèles l_1 et l_2 sont ultraparallèles (resp. parallèles asymptotiques) si $\overline{l}_1 \cap \overline{l}_2 = \emptyset$ (resp. $\overline{l}_1 \cap \overline{l}_2 \neq \emptyset$).



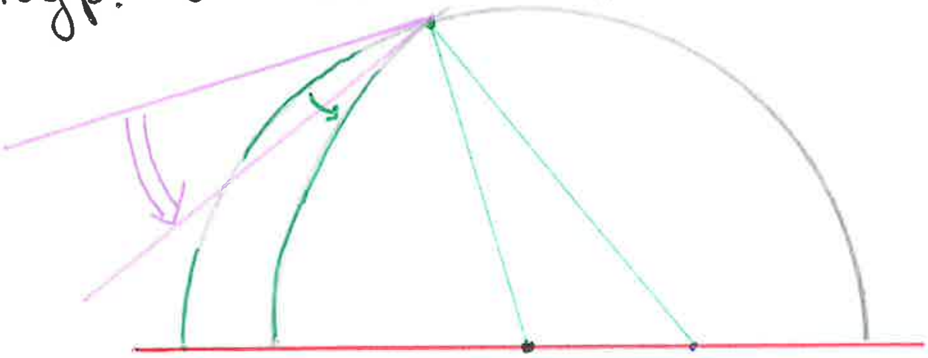
Angle hyperbolique

Définition. On appelle un angle hyperbolique une paire ordonnée de deux démi-droites hyp. de même sommet.



On rappelle que $\mathbb{C}$ a l'orientation canonique, la classe de la base $1, i$.

Définition. La mesure d'un angle hyp. est sa mesure euclidienne, c'est-à-dire la mesure euclidienne de l'angle entre les démi-droites euclidiennes tangentes aux démi-droites hyp. en sommet.

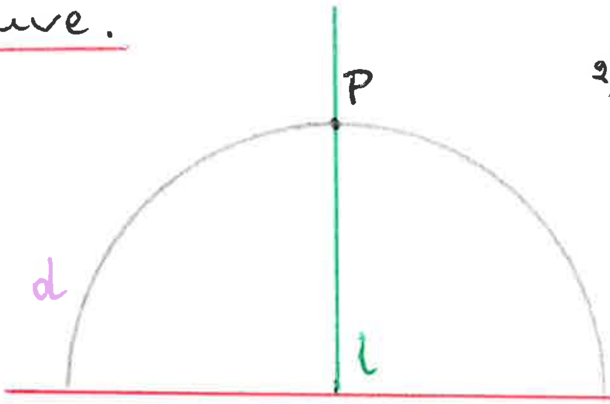


Droites hyperboliques perpendiculaires.

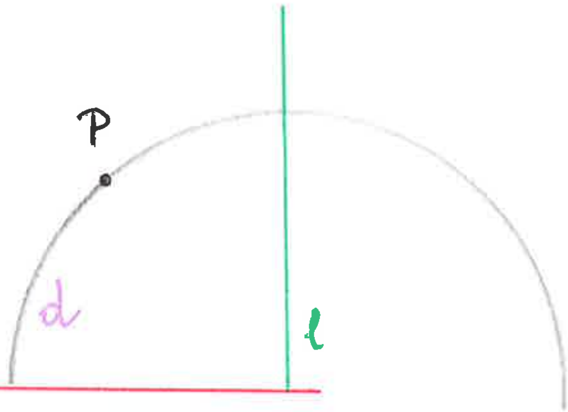
<u>Proposition 3.</u> Soit l une droite hyp. de $\mathbb{H}$ et soit $P \in \mathbb{H}$ un point. Alors il existe une unique droite hyp. d passant par P et perpendiculaire à l.

<u>Preuve.</u>

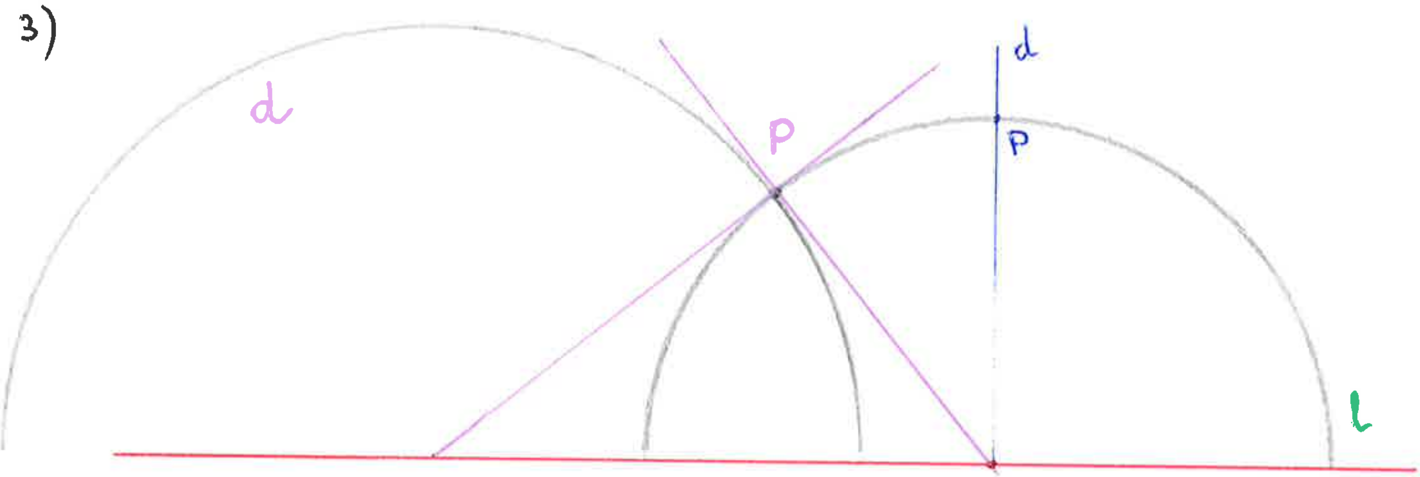
1)



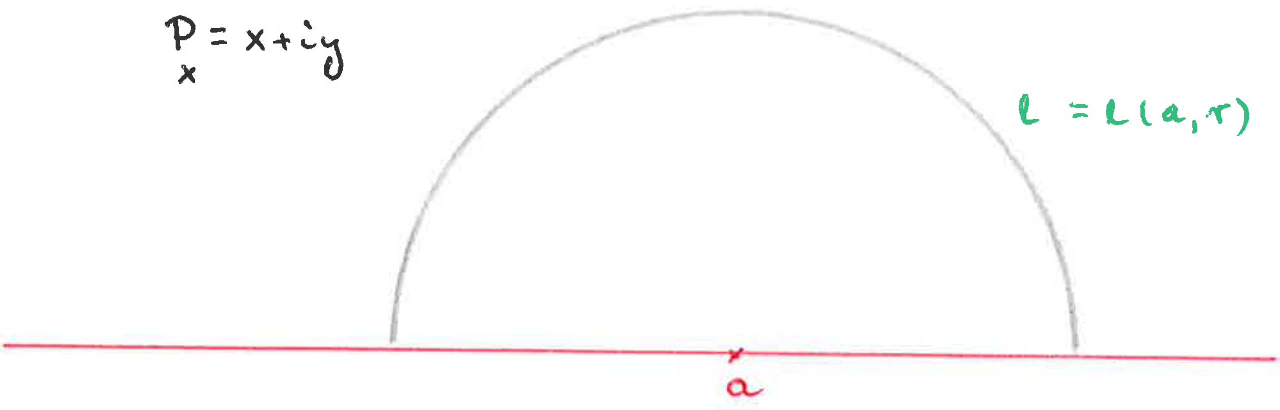
2)



3)



4)



On cherche $l(b,R)$ passant par P et orthogonal à $l(a,r)$.

Donc on cherche $b \in \mathbb{R}$, tel que

$$|x+iy-b|^2 + r^2 = |a-b|^2 .$$

$$(x-b)^2 + y^2 + r^2 = (a-b)^2$$

$$x^2 - 2xb + \cancel{b^2} + y^2 + r^2 = a^2 - 2ab + \cancel{b^2}$$

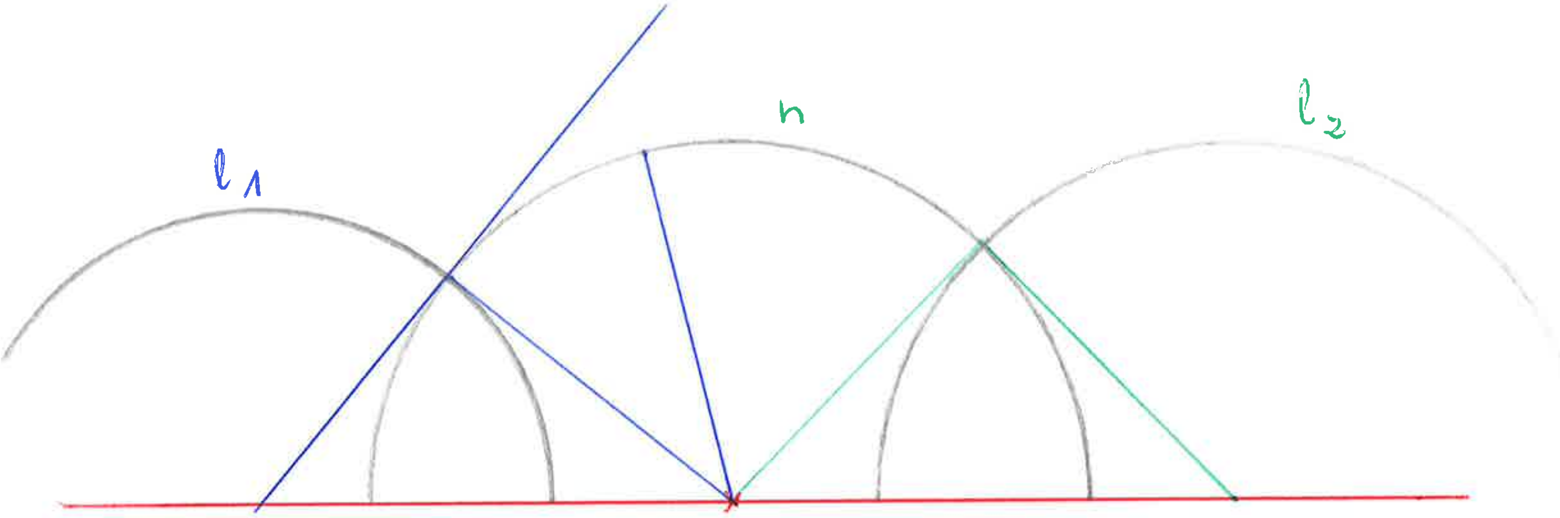
$$2(a-x)b = a^2 - x^2 - y^2 - r^2 .$$

Si $x \neq a$, alors on trouve un unique b. Alors

$$l(b,R) \perp l(a,r) \text{ et } P \in l(b,R),$$

où $b = \dfrac{a^2 - x^2 - y^2 - r^2}{2(a-x)}$, $R = |x+iy-b|$.

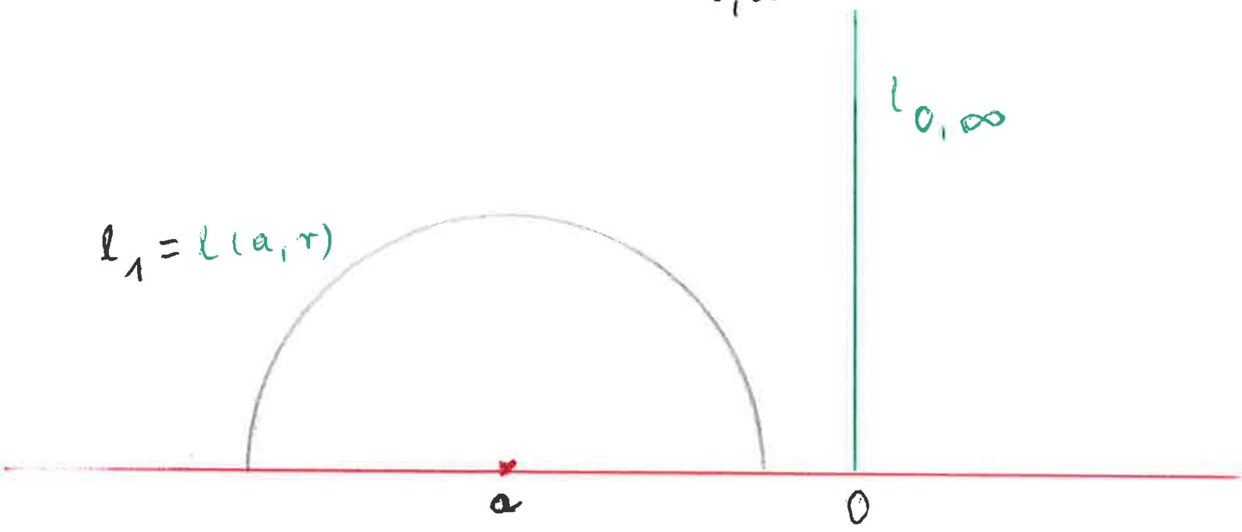
Si $x = a$, alors $l_{a,\infty} \perp l(a,r)$ et $P \in l_{a,\infty}$. ∎



Proposition 4. Les droites hyperboliques l_1 et l_2 sont ultraparallèles si et seulement si il existe une droite hyperbolique n perpendiculaire à l_1 et l_2. La droite n est alors unique.

Preuve.

cas particulier : $l_2 = l_{0,\infty}$.



Si l_1 et l_2 sont ul pa.

Soit $r_1 = \sqrt{|a|^2 - r^2}$

alors ~~p~~ ~~a~~ $r < |a-0| = |a|$. Alors

$l(0, r_1)$ ~~pa~~ est pe à l_1 et l_2 et c'est le unique droite avec cette propriété.

Suppos. que $n \perp l_1$ et $n \perp l_2$. Alors $n = l(r_1, 0)$ pour certain $r_1 > 0$. ~~Donc~~ Cas $r^2 + r_1^2 = a^2$,

donc ~~$|a| > r$~~ . ~~donc~~

l_1 et l_2 sont ultraparallèles car $|a| > r$.

Définition (Longueur d'une courbe paramétrée dans l'espace hyperbolique $\mathbb{H}$).

Soit $M : [a, b] \longrightarrow \mathbb{H}$, $M(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$ une courbe paramétrée régulière de classe $\mathcal{C}^1$ ($\forall\, t,\ z'(t) \neq 0$). Longueur hyperbolique (l.h.) de la courbe paramétrée $M : [a, b] \to \mathbb{H}$ est

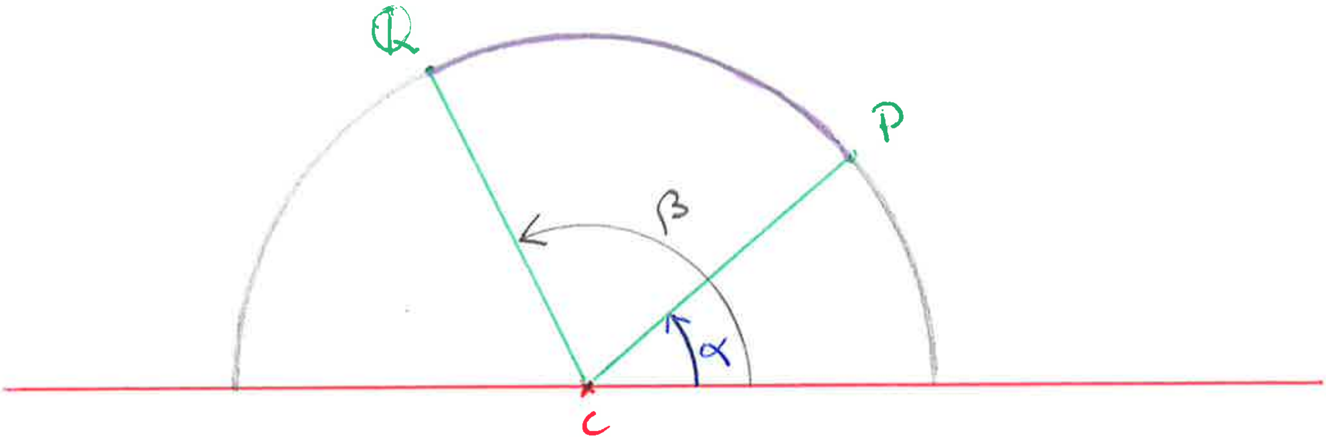
$$\int_a^b \frac{|dz(t)|}{\operatorname{Im} z(t)} = \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)}\, dt ,$$

Proposition 5. Soient P et Q deux points de la droite hyperbolique $l(c, r)$ de $\mathbb{H}$. Soient $\alpha = \widehat{r, P-c}$ et $\beta = \widehat{r, Q-c}$ les angles entre les vecteurs de $\mathbb{C}$. Alors la longueur hyperbolique du segment hyperbolique de P à Q (arc du cercle euclidien de P à Q) est

l.h.(segment hyperbolique de P à Q) =

$$\text{l.h.}([P, Q]_{hyp}) = \log \frac{\csc \beta - \cot \beta}{\csc \alpha - \cot \alpha} ,$$

où $\csc t := \frac{1}{\sin t}$ (csc — cosécant).



Preuve.

$$z(t) = c + re^{it} \quad , t \in]0, \pi[$$

paramétrisation de $C(c,r)$. On note les mesures des angles $\widehat{r, P-c}$ et $\widehat{r, Q-c}$ par α et β respectivement.

Donc

$$l.h.([P,Q])_{hyp} = \int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{r^2(-\sin t)^2 + r^2(\cos t)^2}}{r \sin t} dt =$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{dt}{\sin t} = \log(\csc t - \cot t)\Big|_\alpha^\beta =$$

$$\log(\csc\beta - \cot\beta) - \log(\csc\alpha - \cot\alpha).$$

$$\log(\csc t - \cot t)' = \left(\log \frac{1-\cos t}{\sin t}\right)' = \frac{\sin t}{1-\cos t} \cdot \frac{(\sin t)^2 - (1-\cos t)\cos t}{\sin^2 t}$$

$$= \frac{1-\cos t}{(1-\cos t)\sin t} = \frac{1}{\sin t}.$$

Postulat 2 de Euclide. Il est demandé d'admettre que l'on peut prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée.

Preuve. Soit $[P,Q]_{hyp}$ un segment hyperbolique sur $l(c,r)$. Alors

$$l.h.([P,Q]_{hyp}) = \log\left(\frac{\csc\beta - \cot\beta}{\csc\alpha - \cot\alpha}\right).$$

On a

$$(\csc\alpha - \cot\alpha)(\csc\alpha + \cot\alpha) =$$

$$\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 1.$$

Donc

$$l.h.([P,Q]_{hyp}) = \log\left((\csc\beta - \cot\beta)(\csc\alpha + \cot\alpha)\right).$$

si $\alpha \to 0$ alors $\csc\alpha + \cot\alpha \longrightarrow +\infty$, donc si P, restant sur $l(c,r)$, s'approche $c+r$ (au sens euclidien), alors

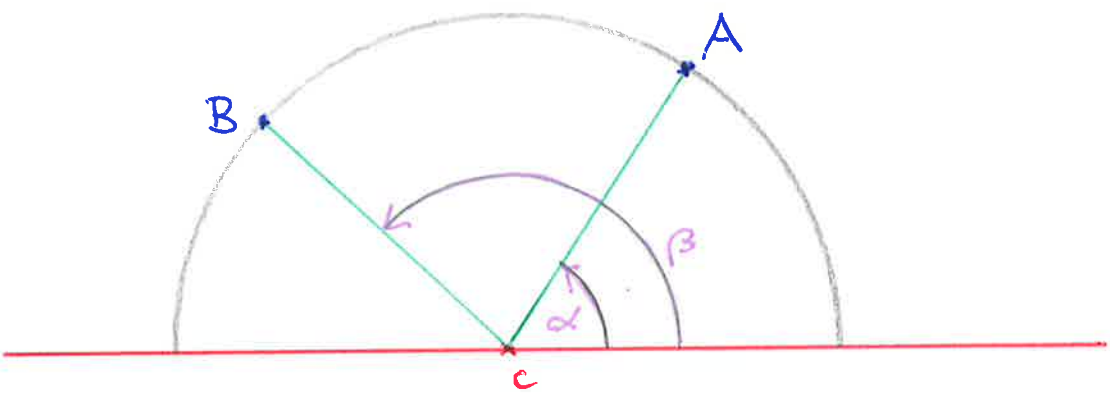
$$l.h.([P,Q]_{hyp}) \longrightarrow +\infty.$$

Le cas quand $[P,Q]_{hyp}$ est sur $l_{a,\infty}$ on fera en T.D. ∎

Proposition 6. Soient $A, B \in \mathbb{H}$ et l la droite hyperbolique passant par A et B. Soit $M : [a, b] \to \mathbb{H}$ une courbe paramétrée régulière telle que $M(a) = A$ et $M(b) = B$. On suppose M de classe $\mathcal{C}^1$. Alors

$$l.h.([A,B]_{hyp}) \leqslant l.h.(\text{courbe paramétrée } M).$$

Preuve.



Soient $A = x_1 + iy_1$ et $B = x_2 + iy_2$. Supposons que $x_1 \neq x_2$. Alors la droite $l(c, r)$ passe par A et B. Supposons que la courbe admet une paramétrisation par l'angle. Alors

$$x(\theta) = r(\theta)\cos\theta \quad , \quad y(\theta) = r(\theta)\sin\theta,$$

$$x'(\theta) = r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta,$$

$$y'(\theta) = r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta,$$

et

$$x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 = r'(\theta)^2 + r(\theta)^2.$$ Donc

$$\text{l.h. (de la courbe } M) = \int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}}{y(\theta)} \, d\theta =$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2}}{r(\theta)\sin\theta} \, d\theta \geqslant \int_\alpha^\beta \frac{d\theta}{\sin\theta} = \text{l.h.}([P,Q]_{hyp}).$$

. . . . $\blacksquare$

Corollaire. Le plus court chemin de A à B dans le plan hyperbolique $\mathbb{H}$ est le long de la droite hyperbolique passant par A et B. $\blacksquare$

Définition. Soient $A, B \in \mathbb{H}$. On définit la distance hyperbolique de A à B par

$$d_h(A,B) := \text{l.h.}([A,B]_{hyp}).$$

Théorème. La fonction $d_h : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une métrique sur $\mathbb{H}$.

Corollaire. Topologie définie sur $\mathbb{H}$ par la métrique d_h est la même que la topologie induite sur $\mathbb{H}$ comme un sous-ensemble de $\mathbb{C}$.

Isométries hyperboliques

Définition. On dit que $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ est une isométrie hyp. si

$$\forall P, Q \in \mathbb{H}, \quad d_h(P, Q) = d_h(f(P), f(Q)).$$

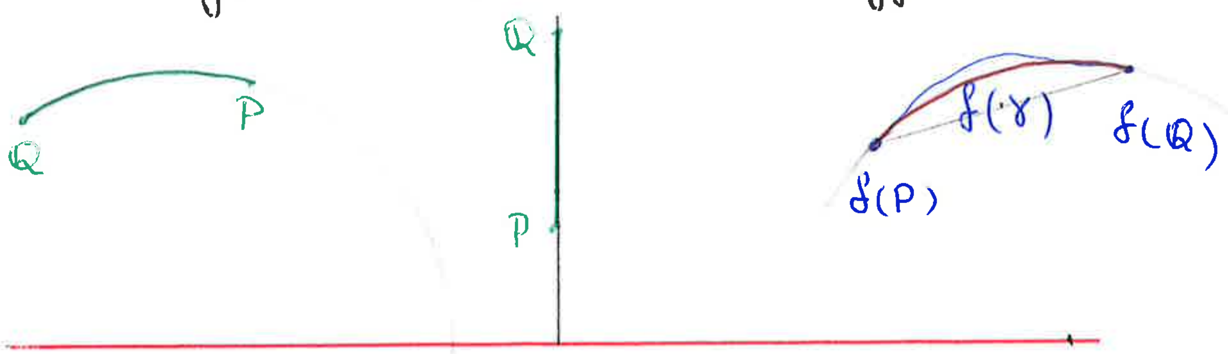
Proposition 7. Soit $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ une application bijective de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g = f^{-1}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que pour chaque courbe regulière de classe $\mathcal{C}^1$ $\gamma : [0,1] \to \mathbb{H}$ on a

$$l.h.(\gamma) = l.h.(f(\gamma)) = l.h.(g(\gamma)).$$

Alors f est une isométrie hyperbolique.

Preuve.

Soient $P, Q \in \mathbb{H}$ et $\gamma : [0,1] \to [P,Q]_{hyp} \subset \mathbb{H}$ une paramétrisation regulière du segment hyperbolique $[P,Q]_{hyp}$.



Alors

$$d_h(P,Q) = l.h.(\gamma) = l.h.(f(\gamma)) \geqslant d_h(f(P), f(Q)).$$

Soit $\delta : [0,1] \to [f(P), f(Q)]_{hyp} \subset \mathbb{H}$ une paramétrisation du segment hyp. $[f(P), f(Q)]_{hyp}$. On a

$$d_h(f(P), f(Q)) = l.h.(\delta) = l.h.(g(\delta)) \geqslant d_h(P,Q).$$

Alors $d_h(P,Q) = d_h(f(P), f(Q))$,

donc f est une isométrie hyperbolique. $\blacksquare$

Théorème Les application suivantes de $\mathbb{H}$ sont des isométries hyperboliques et elle envoient des droites hyperboliques sur des droites hyperboliques :

i) $h(\infty)_r : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $h(\infty)_r(z) = z + r$ avec $r \in \mathbb{R}$.

On appelle $h(\infty)_r$ la horolation (déplacement) autour de la direction ∞

ii) $\tau(l_{c,\infty})_k : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $\tau(l_{c,\infty})_k(z) = c + k(z-c)$

avec $c \in \mathbb{R}$ et $k > 0$. On appelle $\tau(l_{c,\infty})_k$ la translation le long de la droite hyp. $l_{c,\infty}$

iii) $R_{l_{r,\infty}} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$, $R_{l_{r,\infty}}(z) = -\bar{z} + 2r$ avec $r \in \mathbb{R}$. On appelle $R_{l_{r,\infty}}$ la réflexion par rapport à la droite hyp. $l_{r,\infty}$.

iv) $R_{l(c,r)} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$, $R_{l(c,r)}(z) = I_{c,r^2}(z) = c + \frac{r^2}{\bar{z} - c}$.

C'est la réflexion par rapport à la droite hyp. $l(c,r)$.

v) $f_A : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$, $f_A(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ où

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \text{ et } \det A = 1.$$

vi) $f_A \circ R_{l_{0,\infty}}$ où $A \in M_2(\mathbb{R})$ et $\det A = 1$.

Les applications dans i), ii) et v) préservent des angles et les applications envoient un angle α sur $-\alpha$.

Preuve.

v) On a $f_A(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} =$

$$\frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{acz\bar{z} + bd + adz + bc\bar{z}}{|cz+d|^2}.$$

Donc $\quad \operatorname{Im} \dfrac{az+b}{cz+d} = \operatorname{Im} \dfrac{adz + bc\bar{z}}{|cz+d|^2} = \dfrac{(ad-bc)}{|cz+d|^2} \operatorname{Im} z$.

Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{H}$ une courbe regulière de classe $\mathcal{C}^1$. Alors

$$l.h.(f_A(\gamma)) = \int_0^1 \frac{|d\, f_A(\gamma(t))|}{\operatorname{Im} f_A(\gamma(t))} = \int_0^1 \frac{|f_A'(\gamma(t))\, d\gamma(t)|}{\operatorname{Im} f_A(\gamma(t))} =$$

$$\int_0^1 \frac{\left| \dfrac{a(c\cancel{\gamma(t)}+d) - (a\cancel{\gamma(t)}+b)c}{(c\cancel{\gamma(t)}+d)^2} d\gamma(t) \right|}{\dfrac{\operatorname{Im} \gamma(t)}{|c\cancel{\gamma(t)}+d|^2}} = \int_0^1 \frac{|d\gamma(t)|}{\operatorname{Im} \gamma(t)} =$$

$l.h.(\gamma)$.

On vérifie que $f_A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ est bijective et $g(z) = f_A^{-1}(z) = \dfrac{dz - b}{-cz + a}$. Donc on a aussi $l.h.(g(\gamma)) = l.h.(\gamma)$. Proposition 6 implique que $f_A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ est une isométie hyperbolique.

On a

$$z + \tau = \frac{1 \cdot z + \tau}{0 \cdot z + 1} \quad \text{et} \quad k(z-c) + c = \frac{\sqrt{k} \cdot z + \frac{c}{\sqrt{k}}(1-k)}{0 \cdot z + \frac{1}{\sqrt{k}}}.$$

Donc les horolations autour de la direction ∞ et les translations le long des droites $l_{c,\infty}$ sont des isométries hyperboliques.

Soit $R = R_{l_{0,\infty}}$, donc $R(z) = -\bar{z}$. Si $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, alors $R(\gamma(t)) = -x(t) + iy(t)$.

On a

$$l.h.(R(\gamma)) = \int_0^1 \frac{\sqrt{(-x(t)')^2 + y'(t)^2}\, dt}{y(t)} = \int_0^1 \frac{|d\gamma(t)|}{\operatorname{Im}\gamma(t)} =$$

$l.h(\gamma)$. L'application $R : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ est bijective et $R = R^{-1}$ donc R est une isométrie hyp.

On a $R_{l_{r,\infty}} = h(\infty)_{2r} \circ R$. De plus la composé des isométries hyp. est une isométrie hyp. Donc $R_{l_{r,\infty}}$ est une isométrie hyp.

L'application $\varphi(z) = -\frac{1}{z}$ est une isométrie hyp. car $\varphi(z) = f_A(z)$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $R_{l(0,1)} = R_{l_{0,\infty}} \circ \varphi$ est une isométrie hyp.

On a

$$R_{l(c,r)} = h(\infty)_c \circ T(l_{0,\infty})_{r^2} \circ R_{l(0,1)} \circ h(\infty)_{-c}$$

$$\left(z \longmapsto z-c \longmapsto \frac{1}{\bar z - c} \longmapsto \frac{r^2}{\bar z - c} \longmapsto c + \frac{r^2}{\bar z - c}\right).$$

Donc les réflexions (par rapport à une droite hyp.) sont des isométrie hyp.

Le point vi) est évident.

Les applications i), ii), iii) et iv) envoient des droites hyp. sur des droites hyp.

Observons que $\varphi = R_{l_{0,\infty}} \circ R_{l(0,1)}$

$\left(z \longmapsto \frac{1}{\bar z} \longmapsto -\frac{1}{z} = \varphi(z)\right)$. Donc φ envoie des droites hyp. sur des droites hyp.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\det A = 1$. Supposons que $c \neq 0$. Alors

$$f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}(cz+d) + b - \frac{ad}{c}}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)} =$$

$$\frac{a}{c} + \frac{1}{-(c^2 z + cd)},$$ donc f_A envoie des droites hyp. sur des droites hyp.

Si $c = 0$ alors $f_A(z) = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d}$, donc ...

. . . . .

La dernière partie du théorème est la conséquence de A.8 et d'anticonformité d'inversion. $\blacksquare$

Notation. Soit d une droite hyp. On note R_d la réflexion par rapport à la droite d.

Définition. On pose

$$\text{Möb}^+(\mathbb{H}) := \{ f_A : \mathbb{H} \to \mathbb{H} \mid A \in M_2(\mathbb{R}),\ \det A = 1 \}.$$

Théorème. L'ensemble

$$\text{Möb}^+(\mathbb{H}) \cup \{ f \circ R_{l_{0,\infty}} \mid f \in \text{Möb}^+(\mathbb{H}) \}$$

est un groupe. C'est un groupe de toutes isométries hyp. de $\mathbb{H}$. $\blacksquare$

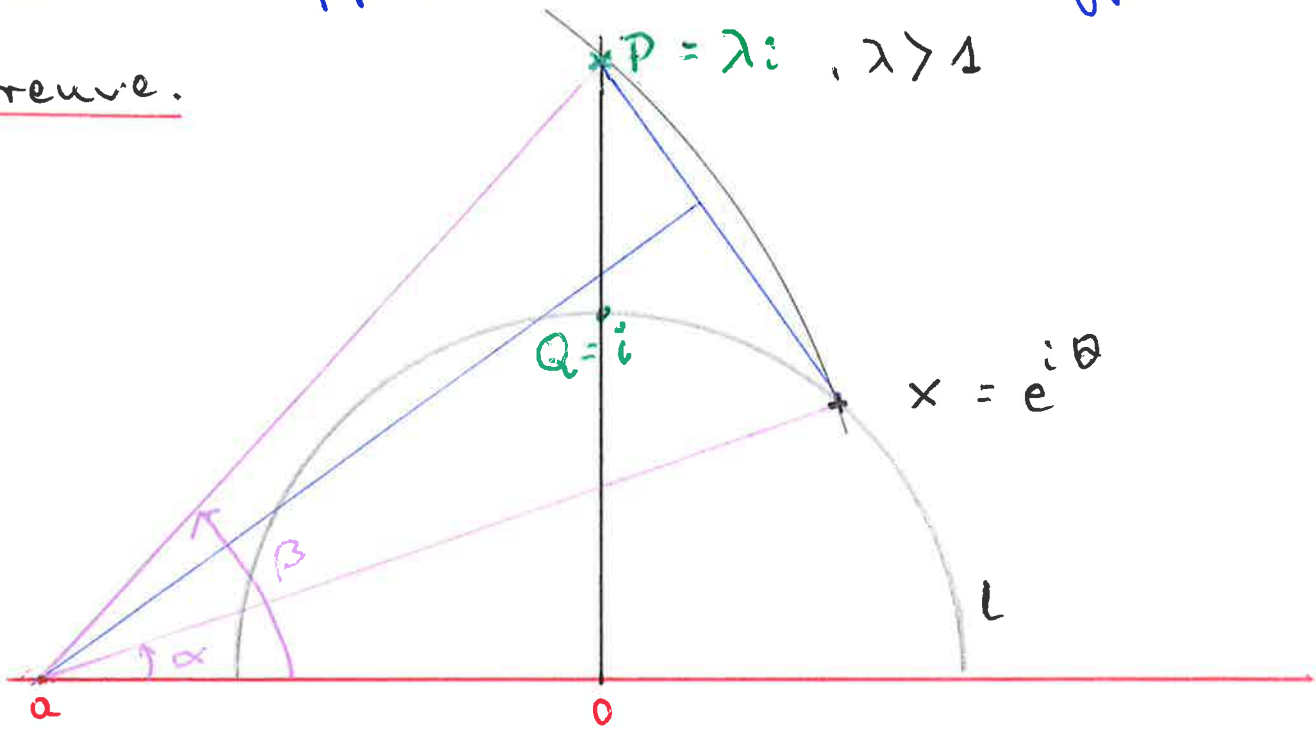
Proposition 8. Soient l une droite hyp., P un point de $\mathbb{H}$ n'appartenant à l et d une droite hyp. passant par P et perpendiculaire à l. Soit Q le point commun de l et d. Alors

$$\forall X \in l \ , \ d_h(P,X) \geqslant d_h(P,Q)$$

avec l'égalité seulement pour $X = Q$.

Le nombre $d_h(P,Q)$ on note $d_h(P,l)$ et on appelle la distance hyp. de P à l.

Preuve.



On suppose $l = l(0,1)$, $P = \lambda i$ avec $\lambda > 1$. Alors $d = l_{0,\infty}$ et $Q = i$.

Alors $d_h(P,Q) = \log \lambda$.

Soit $X = e^{i\theta}$ un point quelconque sur l. Soit $l(a,R)$ la droite hyp. passant par P et X. Alors

$$a^2 + \lambda^2 = R^2 = (|a| + \cos\theta)^2 + \sin^2\theta .$$

$$\cancel{a^2} + \lambda^2 = \cancel{|a|^2} + 2|a|\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta ,$$

donc $|a| = \dfrac{\lambda^2 - 1}{2\cos\theta}$, $a^2 = \dfrac{(\lambda^2-1)^2}{4\cos^2\theta}$,

$$R = \frac{\sqrt{(\lambda^2-1)^2 + 4\lambda^2\cos^2\theta}}{2\cos\theta} ,$$

$$\sin\beta = \frac{\lambda}{R} , \quad \cos\beta = \frac{\lambda^2-1}{2R\cos\theta} , \quad \cot\beta = \frac{\lambda^2-1}{2\lambda\cos\theta}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sin\theta}{R} , \quad \cos\alpha = \frac{\lambda^2 - 1 + 2\cos^2\theta}{2R\cos\theta} ,$$

$$\cot\alpha = \frac{\lambda^2 - 1 + 2\cos^2\theta}{2\cos\theta\sin\theta} .$$

Donc

$$d_h(X,P) = \log\big((\csc\beta - \cot\beta)(\csc\alpha + \cot\alpha)\big) .$$

$$e^{d_h(X,P)} = \left(\frac{1}{\sin\beta} - \cot\beta\right)\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \cot\alpha\right) =$$

$$\left(\frac{R}{\lambda} - \frac{\lambda^2-1}{2\lambda\cos\Theta}\right)\left(\frac{R}{\sin\Theta} + \frac{\lambda^2-1+2\cos^2\Theta}{2\sin\Theta\cos\Theta}\right) =$$

$$\frac{2R\cos\Theta - (\lambda^2-1)}{2\lambda\cos\Theta} \cdot \frac{2R\cos\Theta + (\lambda^2-1) + 2\cos^2\Theta}{2\cos\Theta\sin\Theta} =$$

$$\frac{\overbrace{4R^2\cos^2\Theta}^{\cancel{(\lambda^2-1)^2} + 4\lambda^2\cos^2\Theta} + \cancel{(\lambda^2-1)2R\cos\Theta} + 4R\cos^3\Theta - \cancel{(\lambda^2-1)^2} - \cancel{(\lambda^2-1)2R\cos\Theta} - 2\cos^2\Theta(\lambda^2-1)}{4\lambda\cos^2\Theta\sin\Theta} =$$

$$\frac{4\lambda^2 + 4R\cos\Theta - 2\lambda^2 + 2}{4\lambda\sin\Theta} = \frac{2\lambda^2 + 2R\cos\Theta - \lambda^2 + 1}{2\lambda\sin\Theta} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda^2+1}{2\lambda\sin\Theta}\right) + \frac{2R\cos\Theta}{2\lambda\sin\Theta} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{\sin\Theta} + \sqrt{\frac{(\lambda^2-1)^2 + 4\lambda^2\cos^2\Theta}{4\lambda^2\sin^2\Theta}} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{\sin\Theta} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)\right)^2\frac{1}{\sin^2\Theta} - 1} =: \Psi(\Theta)$$

car $\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 + 4\lambda^2\cos^2\Theta + 4\lambda^2\sin^2\Theta - 4\lambda^2\sin^2\Theta = \ldots$

On a $\Psi'(\Theta) =$

$$\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)\frac{(-\cos\Theta)}{\sin\Theta} + \frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)\right)^2 (-2)\frac{1}{\sin^3\Theta}\cos\Theta}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)\right)^2\frac{1}{\sin^2\Theta}-1}} < 0$$

pour $0 < \Theta < \frac{\pi}{2}$ et $\Psi'(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Donc la fonction $\Psi(\Theta) = e^{d_h(X,P)}$ est decroissante avec la valeur plus petite pour $\Theta = \frac{\pi}{2}$, donc pour $X = Q$.

Définition. Soit $O \in \mathbb{H}$ et soit $\rho > 0$. L'ensemble

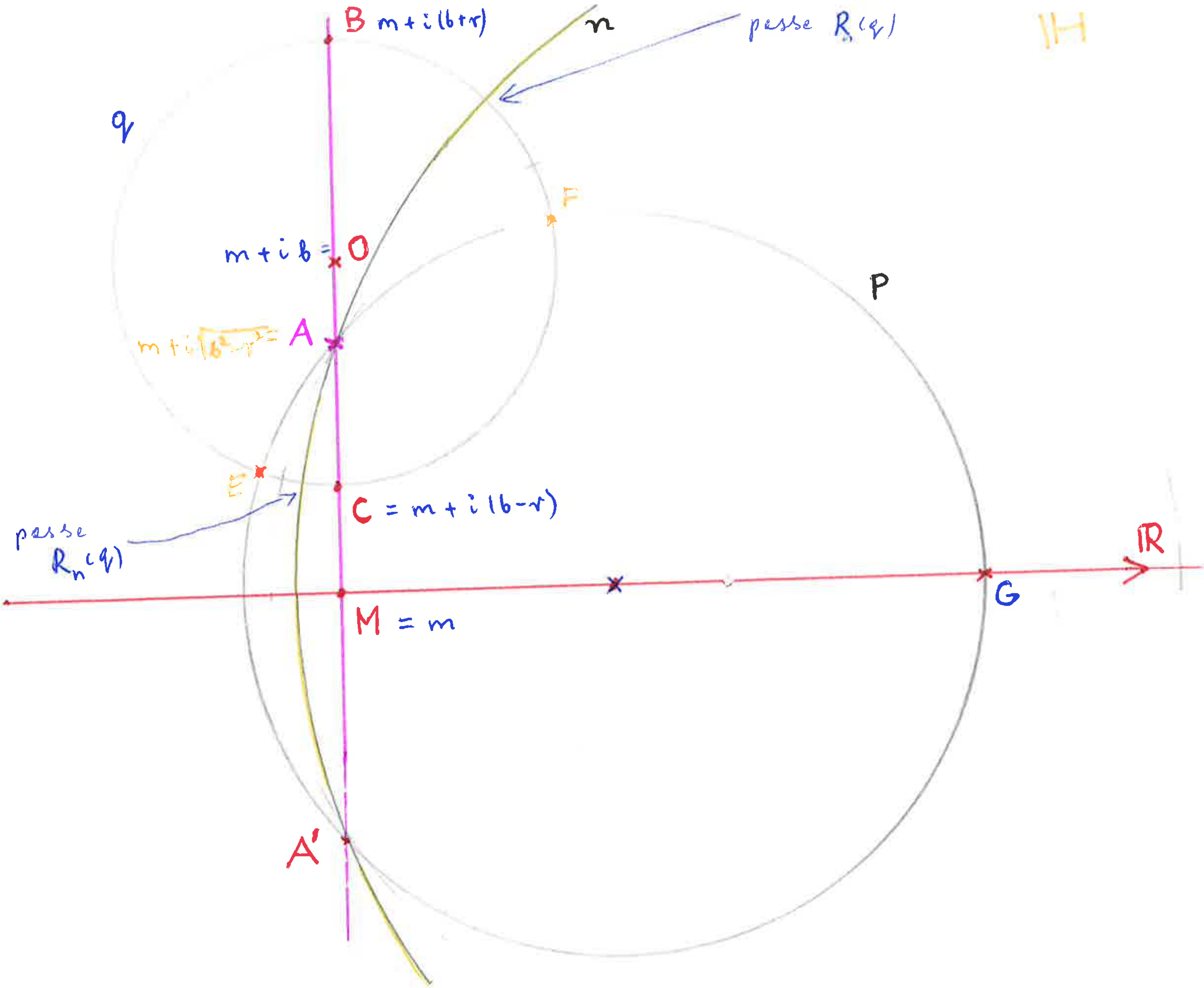
$$S_h(O,\rho) := \{ P \in \mathbb{H} \mid d_h(P,O) = \rho \}$$

s'appelle un cercle hyperbolique de centre hyp. O et de rayon hyp. ρ.

Théorème. Chaque cercle euclidien q contenu dans $\mathbb{H}$ est aussi un cercle hyperbolique. Si le centre euclidien de q est $m+ib$ et le rayon euclidien est r, alors le centre hyp. de q est $m+i\sqrt{b^2-r^2}$ et le rayon hyp. de q est $\frac{1}{2}\log\frac{b+r}{b-r}$.

Preuve.

Soit q un cercle euclidien contenu dans de centre euc. $O = m+ib$ et de rayon euc. r. La droite $\operatorname{Re} z = m$ coupe le cercle q dans $C = m+i(b+r)$ et $B = m+i(b-r)$.



Théorème. Chaque cercle euclidien q de $\mathbb{C}$ contenu dans $\mathbb{H}$ est aussi un cercle hyperbolique. Si le centre eucl. de q est x_0+iy_0 et rayon eucl. est r, alors le centre hyp. est $x_0+i\sqrt{y_0^2-r^2}$ et le rayon hyp. est $R=\frac{1}{2}\log\frac{y_0+r}{y_0-r}$.

Preuve.

Soit q un cercle euclidien contenu dans $\mathbb{H}$ de centre $O = m+ib$ et de rayon r. La droite $\mathrm{Re}\, z = m$ coupe le cercle q dans $C = m+i(b-r)$ et $B = m+i(b+r)$.

Soit A le milieu hyperbolique du segment $[C,B]_{hyp}$. Alors $A = m + i\sqrt{b^2-r^2}$.

Soit p une droite hyperbolique passant par A, donc $p = l(x,\alpha)$.

Soit $\{E,F\} = p \cap q$.

Soit I_{O,r^2} l'inversion de pôle O et de puissance r^2. Alors q est le cercle de l'inversion I_{O,r^2}. On a

$$I_{O,r^2}(E) = E \quad \text{et} \quad I_{O,r^2}(F) = F.$$

Soit $A' = I_{O,r^2}(A)$. Alors $A' = m + iy'$.

De plus $\|\vec{OA}\| \cdot \|\vec{OA'}\| = r^2$, donc

$$\left(b - \sqrt{b^2-r^2}\right)(b - y') = r^2,$$

d'où

$$y' = b - \frac{r^2}{b - \sqrt{b^2-r^2}} = \frac{b^2 - b\sqrt{b^2-r^2} - r^2}{b - \sqrt{b^2-r^2}} = \frac{\left(\sqrt{b^2-r^2}\right)^2 - b\sqrt{b^2-r^2}}{b - \sqrt{b^2-r^2}} =$$

$$-\sqrt{b^2-r^2}.$$

Donc $A' = m - i\sqrt{b^2-r^2}$.

La droite hyp. p est une partie

du cercle euclidien, que nous notons cercle euc. p. Observons que

$$A' \in \text{cercle euc. } p.$$

Donc les points $E, F, A' \in$ cercle euc. p. Mais $I_{O,r^2}(\text{cercle euc. } p) = S$ - un cercle euclidien. De plus $A' = I_{O,r^2}(A), E, F \in S$. Donc

$$I_{O,r^2}(\text{cercle euc. } p) = \text{cercle euc. } p,$$

car par trois points de $\mathbb{C}$ passe un unique cercle euclidien. Donc

$$p \perp q.$$

Soit R_p la réflexion hyp. par rapport à la droite hyp. p (l'inversion dont le cercle de l'inversion est p). Alors

$$p \perp q \quad \text{implique} \quad R_p(q) = q.$$

Soit G le point d'intersection du cercle euc. p avec l'axe réel, donc $G = x + \alpha$.

Soit n la droite hyp. $l(G, \|\overrightarrow{A,G}\|)$.

Soit R_n la réflexion hyp par rapport à la droite hyp. n. On regarde R_n aussi comme une inversion de $\mathbb{C}$.

On a

$R_n(A) = A$. De plus $A' \in n$, donc $R_n(A') = A'$. On a donc

$$R_n(p) = l_{m,\infty}.$$

De plus $q \perp p \Rightarrow R_n(q) \perp R_n(p) = l_{m,\infty}$. $R_n(q)$ est un cercle eucl., dont le centre est sur $l_{m,\infty}$. De plus $R_n(q)$ passe par les points de l'intersection $q \cap n$, donc $R_n(q) = q$.

$E, F \in p \cap q$, donc $R_n(E), R_n(F) \in l_{m,\infty} \cap q$, donc $R_n(E) = C$ et $R_n(F) = B$.

On a $R_n([E,A]_{hyp}) = [C,A]_{hyp}$, donc pour $\forall$ droite hyp. p passant par A on a

$$d_h(E,A) = d_h(C,A).$$

Donc $q = \{ E \in \mathbb{H} \mid d_h(E, A) = \rho \}$,

où $\rho = d_h(C, A) = \log \frac{\sqrt{b^2 - r^2}}{b - r} = \log \sqrt{\frac{b+r}{b-r}} =$

$\frac{1}{2} \log \frac{b+r}{b-r}$.

Donc q est un cercle hyp. de centre hyp. $m + i\sqrt{b^2 - r^2}$ et de rayon hyp. $\frac{1}{2} \log \frac{b+r}{b-r}$.

Corollaire. Un cercle hyperbolique de $\mathbb{H}$ est aussi un cercle euclidien.

Preuve.

Soit S un cercle hyp. de centre hyp. $X_0 + iY_0$ et de rayon hyp. ρ. On calcule r et y_0 des équations

$$(*) \quad \rho = \frac{1}{2} \log \frac{y_0 + r}{y_0 - r}, \quad Y_0^2 = y_0^2 - r^2.$$

Alors le cercle euclidien du centre $X_0 + iy_0$ et du rayon r est aussi un cercle hyp. dont le centre hyp. et le rayon hyp. sont donnés par les équations $(*)$, donc c'est le cercle hyp. S.

* on doit montrer qu'il est contenu dans $\mathbb{H}$.