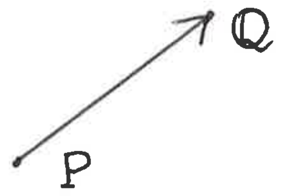
§ 1. Géométrie affine



Définition 1. Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel (e.v.) sur un corps $\mathbb{K}$. Un ensemble non-vide $\mathcal{E}$ est dit un espace affine (e. aff.) de direction $\mathbb{E}$ s'il existe une application

$$\mathcal{E} \times \mathbb{E} \to \mathcal{E}, \quad (x, v) \longmapsto x \dot{+} v$$

telle que

1) $\forall x \in \mathcal{E}, \forall v \in \mathbb{E}, \forall w \in \mathbb{E},$
$$(x \dot{+} v) \dot{+} w = x \dot{+} (v + w)$$

2) $\forall x \in \mathcal{E}, \quad x \dot{+} 0_{\mathbb{E}} = x$

3) $\forall x \in \mathcal{E}, \forall y \in \mathcal{E}, \exists v \in \mathbb{E}$ t.q. $x \dot{+} v = y$

4) $\forall x \in \mathcal{E}, \forall v \in \mathcal{E}, x \dot{+} v = x \Rightarrow v = 0_{\mathbb{E}}$.

Remarques:

5) v dans 3) est unique. Le v t.q. $x \dot{+} v = y$ on note $\overrightarrow{x,y}$.

6) Soient x, y et z appartient à $\mathcal{E}$. Alors
$$\overrightarrow{x,y} + \overrightarrow{y,z} = \overrightarrow{x,z}.$$
(Regle de Chasles).

Donc $\overrightarrow{xy} = -\overrightarrow{yx}$.

Examples:

1) A^n_K – K^n muni de sa structure affine canonique, donc $\mathbb{E} = K^n$ et
$$A^n_K \times K^n \longrightarrow A^n_K, \quad (x, v) \longmapsto x + v,$$
donc $x \dot{+} v = x + v$.

2) $S = \{x \in K^n \mid Ax = b\}$ où $A \in M_{m,n}(K)$ – matrices de m lignes et n colonnes, $b \in K^m$.
On suppose $S \neq \emptyset$. On pose
$$V = \{x \in K^n \mid Ax = 0\}$$
– espace vectoriel

S est un espace affine de direction V
$$S \times V \to S, \quad (x, v) \longmapsto x + v.$$

3) Soit $\mathbb{E}$ un espace vect. Alors $\mathbb{E}$ est muni de la structure canonique d'un espace affine (comme dans 1)).

Si $\mathcal{E}$ est un espace affine de direction $\mathbb{E}$ on note souvent $\mathbb{E}$ par $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

On défini

$$\dim \mathcal{E} := \dim \vec{\mathcal{E}}.$$

Proposition 1. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $\mathbb{E}$. Soit $x \in \mathcal{E}$. Alors l'application

$$\xi_x : \mathbb{E} \to \mathcal{E}, \quad v \longmapsto x \dot{+} v$$

est une bijection.

Corollaire 2. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et soit $x \in \mathcal{E}$. L'application $\xi_x : \vec{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}$ induit sur $\mathcal{E}$ une structure d'un espace vectoriel telle que ξ_x devient un isomorphisme des espaces vectoriels.

Preuve. Soient $y, y_1 \in \mathcal{E}$ et soit $\alpha \in K$.

On pose

$$y +_{\mathcal{E}} y_1 := \xi_x\left(\xi_x^{-1}(y) + \xi_x^{-1}(y_1)\right)$$

et

$$\alpha \cdot_{\mathcal{E}} y := \xi_x\left(\alpha \cdot \xi_x^{-1}(y)\right).$$

Il rest à vérifier que $\mathcal{E}$ muni des operations $+_{\mathcal{E}}$ et $\cdot_{\mathcal{E}}$ est un e.v. et que ξ_x est un isomorphisme des espaces vectoriels. ∎

Définition 2. Soit X un ensemble. Un groupe de transformation $\mathcal{G}$ de l'ensemble X est un ensemble non vide des bijection de X t.q.

si $f, g \in \mathcal{G}$ alors $f \circ g \in \mathcal{G}$ et $f^{-1} \in \mathcal{G}$.

(Noter que $Id_X \in \mathcal{G}$.)

Proposition 3. Un groupe de transformation d'un ensemble est un groupe.

Preuve. Soit X un ensemble et soit $\mathcal{G}$ un groupe de transformation de X.

Soient $f, g, h \in \mathcal{G}$. Alors

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h),$$

$$f \circ Id_X = Id_X \circ f = f,$$

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id_X.$$

Donc $\mathcal{G}$ muni de la loi de composition $\circ$ est un groupe. ∎

Définition 3. Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ des groupes. L' application $f : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ est un morphisme des groupes si

$$\forall\, x, y \in \mathcal{G}, \qquad f(x \underset{\mathcal{G}}{\circ} y) = f(x) \underset{\mathcal{H}}{\circ} f(y).$$

Définition 3 (de translation). Soit $\mathcal{E}$ un e. aff. et soit $v \in \vec{\mathcal{E}}$. L'application

$$\tau_v : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad x \longmapsto x \dot{+} v$$

s'appelle translation de $\mathcal{E}$ par le vecteur v.

Proposition 4. Une translation d'un espace vectoriel est une bijection.

Preuve. Soient $\mathcal{E}$ un espace affine et $v \in \vec{\mathcal{E}}$. Soit $\tau_v : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ la translation de $\mathcal{E}$ per v.

Supposons que

$$\tau_v(x) = \tau_v(y).$$

Donc $x \dot{+} v = y \dot{+} v$.

On a $y = x \dot{+} \overrightarrow{x,y}$ par 3) et 5).

Donc $x \dot{+} v = (x \dot{+} \overrightarrow{x,y}) \dot{+} v = x \dot{+} (\overrightarrow{xy} + v)$ par 1).

Donc $\quad v = \overrightarrow{xy} + v \quad$ par 3) et 5),

et
$$\overrightarrow{xy} = 0_{\vec{\mathcal{E}}} .$$

D'où $\quad y = x \dot{+} \overrightarrow{xy} = x \dot{+} 0 = x \quad$ par 4).

L'application τ_v est donc injective.

Soit $x \in \mathcal{E}$. Posons $z := x \dot{+} (-v)$.

Alors $\tau_v(z) = z \dot{+} v = (x \dot{+} (-v)) \dot{+} v =$

$x \dot{+} ((-v) + v) = x \dot{+} 0_{\vec{\mathcal{E}}} = x \quad$ par 1) et 4).

Donc τ_v est surjective. $\blacksquare$

Soit
$$T : \vec{\mathcal{E}} \to \mathrm{Bijections}(\mathcal{E}) , \; v \longmapsto \tau_v .$$

On rappelle que $\vec{\mathcal{E}}$ muni de la loi de composition $+$ et $\mathrm{Bijections}(\mathcal{E})$ muni de $\circ$ sont des groupes.

Proposition 5. L'application $T : \vec{\mathcal{E}} \to \mathrm{Bijections}(\mathcal{E})$ est un morphisme injective des groupes.

$\mathrm{Image}(T) = T(\vec{\mathcal{E}})$ est un sous-groupe de $\mathrm{Bijections}(\mathcal{E})$.

C'est un groupe de translation de $\mathcal{E}$.

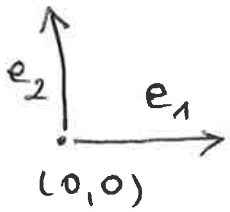
Repère affine

Définition 4. Soit $\mathcal{E}$ un e. aff. Un repère affine ou un repère de $\mathcal{E}$ est une suite

$$\mathcal{R} = (Q\, ;\, e_1, \dots, e_n) \in \mathcal{E} \times \vec{\mathcal{E}}^{\,n}$$

telle que $e_1, \dots, e_n$ est un base de $\vec{\mathcal{E}}$.

Exemple.



repère affine de $\mathbb{R}^2$

Coordonnées d'un point dans un repère

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension n.

Soit $(Q\, ;\, e_1, \dots, e_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$,

Soit $P \in \mathcal{E}$. Alors

$$Q \dot{+} \overrightarrow{QP} = P.$$

On a $\overrightarrow{QP} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

sont les coordonnée de point P dans le repère $(Q; e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Soient $\mathcal{R} = (Q; e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{R}_1 = (Q_1; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ deux repère de $\mathcal{E}$.

Soit $P \in \mathcal{E}$. Soient $(\lambda_1, \dots \lambda_n), (\mu_1, \dots, \mu_n)$ les coordonnées de P dans le repère $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_1$ respectivement. On a

$$P = Q \dot{+} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \quad \text{et} \quad P = Q_1 \dot{+} \sum_{i=1}^{n} \mu_i \varepsilon_i .$$

De plus $e_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \varepsilon_i$ pour $i = 1, 2, \dots, n$.

Posons

$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & & e_n \end{array} \\ \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \\ \varepsilon_n \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

A est la matrice de $Id_{\vec{\mathcal{E}}} : \underset{e_1 \dots e_n}{\vec{\mathcal{E}}} \to \underset{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}{\vec{\mathcal{E}}}$ dans les base $(e_1, \dots, e_n)$ et $(\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n)$.

On a

$$Q = Q_1 \dotplus \overrightarrow{Q_1 Q} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{Q_1 Q} = \sum_{j=1}^{n} c_j \varepsilon_j \quad \text{pour}$$

certains $c_1, \ldots, c_n \in K$.

Alors

$$P = Q \dotplus \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) =$$

$$\left(Q_1 \dotplus \overrightarrow{Q_1 Q}\right) \dotplus \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} \varepsilon_j\right)\right) =$$

$$\left(Q_1 \dotplus \sum_{j=1}^{n} c_j \varepsilon_j\right) \dotplus \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \lambda_i\right) \varepsilon_j\right) =$$

$$Q_1 \dotplus \left(\sum_{j=1}^{n} \left(c_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \lambda_i\right) \varepsilon_j\right) = Q_1 \dotplus \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j \varepsilon_j\right).$$

Donc

$$\left(c_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \lambda_i\right)_{j=1}^{n} = \left(\mu_j\right)_{j=1}^{n}.$$

Posons

$$c := \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mu := \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\boxed{A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}}$$

coordonnées de Q dans $\mathcal{R}_1$

$$\mu = A\lambda + c$$

coordonnées de P dans $\mathcal{R}_1$

matrice de passage de $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ à $e_1, \dots, e_n$

coordonnées de P dans $\mathcal{R}$

Applications affines

Définition 5. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ des espaces affines. On dit que

$$f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$$

est une application (ou un morphisme) affine s'il existe une application linéaire

$\vec{f} : \vec{\mathcal{E}} \to \vec{\mathcal{F}}$ telle que

$$\forall (P, Q) \in \mathcal{E}^2, \quad \overrightarrow{f(P), f(Q)} = \vec{f}\,(\overrightarrow{P,Q}).$$

On montre que $\vec{f}$ est unique et on l'appelle la partie linéaire de (l'application affine) f.

Remarque. Soient $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ un morphisme affine et $Q \in \mathcal{E}$. Soit $X \in \mathcal{E}$ un point quelconque. Alors

(1) $$\boxed{f(X) = f(Q) \dot{+} \vec{f}(\overrightarrow{QX})}$$

car $f(X) = f(Q) \dot{+} \overrightarrow{f(Q),f(X)} = f(Q) \dot{+} \vec{f}(Q,X)$.

(1) on peut écrire dans le forme

(2) $$\boxed{f(Q \dot{+} \overrightarrow{QX}) = f(Q) \dot{+} \vec{f}(\overrightarrow{QX})}.$$

Proposition 6. Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ des espaces affines, $Q \in \mathcal{E}$, $P \in \mathcal{F}$ et $g : \vec{\mathcal{E}} \to \vec{\mathcal{F}}$ une application linéaire.

i) L'application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ définie par $f(X) := P \dot{+} g(\overrightarrow{QX})$ est une application affine et $\vec{f} = g$.

ii) Chaque application affine de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{F}$ a cette form.

Preuve. Soient $X, Y \in \mathcal{E}$. Alors $f(X) = P \dot{+} g(\overrightarrow{QX})$ et $f(Y) = P \dot{+} g(\overrightarrow{QY})$. On a

$\overrightarrow{f(X),f(Y)} = \overrightarrow{P \dot{+} g(\overrightarrow{QX}), P \dot{+} g(\overrightarrow{QY})} =$

$\overrightarrow{P \dot{+} g(\overrightarrow{QX}), P} + \overrightarrow{P, P \dot{+} g(\overrightarrow{QY})} =$ par 6)

$-g(\overrightarrow{QX}) + g(\overrightarrow{QY}) = g(-\overrightarrow{QX} + \overrightarrow{QY}) = g(\overrightarrow{XQ} + \overrightarrow{QY}) =$

$g(\overrightarrow{XY})$. Donc f est un morphisme affine et $\vec{f} = g$.

ii) voir Remarque. ∎

Proposition 7. i) Si $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ et $g : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ sont des morphismes affines alors $g \circ f$ est un morphisme affine et $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$.

ii) Un morphisme affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est bijectif si et seulement si $\vec{f}$ est un isomorphisme. Alors $f^{-1} : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ est aussi un morphisme affine et $\overrightarrow{f^{-1}} = \vec{f}^{-1}$.

On dit alors que f est un isomorphisme affine.

Proposition 8. Soit $\mathcal{R} = (Q ; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$. L'application

$$\varphi_{\mathcal{R}} : \mathbb{A}^n_K \longrightarrow \mathcal{E} \;,\; (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \longmapsto Q \dot{+} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_i\right)$$

est un isomorphisme affine.

Exercice.

i) Soit t une translation de $\mathcal{E}$. Montrer que t est un morphisme affine de $\mathcal{E}$ et $\vec{t} = \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{E}}}$.

ii) Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ un morphisme affine tel que $\vec{f} = \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{E}}}$. Montrer que f est une translation de $\mathcal{E}$.

Morphismes affines dans des coordonnées

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ des espaces affines munis des repères $\mathcal{R} = (Q; e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{R}_1 = (Q_1; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$.

Si $x \in \mathcal{E}$ (resp. $y \in \mathcal{F}$) on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (resp. $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$) les coordonnées de x (resp. y) dans $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}_1$). Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ un morphisme affine.

Soit A la matrice de $\vec{\varphi}$ dans les bases $(e_1, \dots, e_n)$ de $\vec{\mathcal{E}}$ et $(\varepsilon_1, \dots \varepsilon_p)$ de $\vec{\mathcal{F}}$.

Soit $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\varphi(Q)$ dans le repère $\mathcal{R}_1$, donc $\varphi(Q) = Q_1 \dot{+} (\sum_{j=1}^{p} c_j \varepsilon_j)$.

Alors

$$Q_1 \dot{+} \left(\sum_{j=1}^{p} y_j \varepsilon_j\right) = Q_1 \dot{+} \overrightarrow{Q_1 y} = y = \varphi(x) =$$

$$\varphi(Q \dot{+} \overrightarrow{Qx}) = \varphi(Q) \dot{+} \vec{\varphi}(\overrightarrow{Qx}) =$$

$$\left(Q_1 \dot{+} \overrightarrow{Q_1 \varphi(Q)}\right) \dot{+} \vec{\varphi}(\overrightarrow{Qx}) =$$

$$Q_1 \dot{+} \left(\sum_{j=1}^{p} c_j \varepsilon_j + \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i\right) \varepsilon_j\right).$$

Donc

$$\boxed{Y = C + AX}$$

coordonnées de x dans $\mathcal{R}$

coordonnées de $y = \varphi(x)$ dans $\mathcal{R}_1$

coordonnées de $\varphi(Q)$ dans $\mathcal{R}_1$

matrice de $\vec{\varphi}$ dans $e_1 \dots e_n$ et $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p$

Isomorphismes affines d'un espace affine

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. On note

$$GA(\mathcal{E})$$

le groupe des isomorphismes affines de $\mathcal{E}$.

Theorem 9. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. L'application

$$L : GA(\mathcal{E}) \longrightarrow GL(\vec{\mathcal{E}}), \quad f \longmapsto \vec{f}$$

est un morphisme surjectif des groupes, dont le noyau est le groupe de translations de $\mathcal{E}$.

Preuve.

On a $\overrightarrow{f \circ g} = \vec{f} \circ \vec{g}$ (Proposition 7), donc L est un morphisme des groupes.

Soit $F \in GL(\vec{\mathcal{E}})$ et soit $P \in \mathcal{E}$. Alors $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ définie par $f(X) := P \dot{+} F(\overrightarrow{PX})$ est un morphisme affine et $\vec{f} = F$ (Proposition 6). Donc L est surjectif.

$$\ker L = \{ f \in GA(\mathcal{E}) \mid \vec{f} = \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{E}}} \} = T(\vec{\mathcal{E}})$$ – groupe de translation de $\mathcal{E}$ (exercice). ∎

Sous-espaces affines

Lemme 10. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Soient V et V_1 sous-espaces vectoriels de $\vec{\mathcal{E}}$. Soit $P \in \mathcal{E}$ un point de $\mathcal{E}$. Si

$$P \dot{+} V = P \dot{+} V_1$$

alors $V = V_1$.

Preuve. Soit $v \in V$, alors $P \dot{+} v \in P \dot{+} V_1$, donc il existe $w \in V_1$ tel que $P \dot{+} v = P \dot{+} w$. Donc $v = w \in V_1$. ∎

Définition 6. Soient $\mathcal{E}$ un espace affine, $A \in \mathcal{E}$ un point de $\mathcal{E}$ et $V \subset \vec{\mathcal{E}}$ un sous-espace vectoriel de $\vec{\mathcal{E}}$. L'ensemble

$$\mathcal{V} := \{ A \dot{+} u \in \mathcal{E} \mid u \in V \} = A \dot{+} V$$

s'appelle un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction V et passant par A.

Remarque. Soit $e_1, \ldots, e_p$ une base de V. Alors

$$A \dot{+} V = \{ A \dot{+} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in K^p \}.$$

On pose $\dim(A \dot{+} V) := \dim V$.

Lemme 11. Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. Si $P \in \mathcal{V}$ alors $\mathcal{V} = P \dot{+} \vec{\mathcal{V}}$.

Preuve. Par définition $\mathcal{V} = A \dotplus \vec{\mathcal{V}}$ pour certain $A \in \mathcal{V}$. Si $P \in \mathcal{V}$ alors $P = A \dotplus v_0$ pour certain $v_0 \in \vec{\mathcal{V}}$.

Soit $w \in \vec{\mathcal{V}}$. Alors $P \dotplus w =$
$(A \dotplus v_0) \dotplus w = A \dotplus (v_0 + w) \in A \dotplus \vec{\mathcal{V}} = \mathcal{V}$.
Donc $P \dotplus \vec{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}$.

Si $Q \in \mathcal{V}$, alors $Q = A \dotplus v$ pour certain $v \in \vec{\mathcal{V}}$. On a $A = P \dotplus (-v_0)$. Donc $Q = A \dotplus v = (P \dotplus (-v_0)) \dotplus v = P \dotplus (-v_0 + v) \in P \dotplus \vec{\mathcal{V}}$. Donc $\mathcal{V} \subset P \dotplus \vec{\mathcal{V}}$.

Proposition 12. Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$. Si $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ alors $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\vec{\mathcal{U}} \cap \vec{\mathcal{V}}$.

Preuve. Supposons que $P \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Alors $\mathcal{U} = P \dotplus \vec{\mathcal{U}}$ et $\mathcal{V} = P \dotplus \vec{\mathcal{V}}$. Montrons que

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = P \dotplus (\vec{\mathcal{U}} \cap \vec{\mathcal{V}}).$$

Soit $X \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Alors $X = P \dotplus u$, $u \in \vec{\mathcal{U}}$ et $X = P \dotplus v$, $v \in \vec{\mathcal{V}}$. Mais $P \dotplus u = P \dotplus v$ implique $u = v \in \vec{\mathcal{U}} \cap \vec{\mathcal{V}}$. Donc $X \in P \dotplus (\vec{\mathcal{U}} \cap \vec{\mathcal{V}})$.

Si $X \in P \dotplus (\vec{\mathcal{U}} \cap \vec{\mathcal{V}})$ alors $X \in P \dotplus \vec{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$ et $X \in P \dotplus \vec{\mathcal{V}} = \mathcal{V}$. Donc $X \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

Définition 7 (de sous-espaces affines parallèles) On dit que deux sous-espaces affines $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ de $\mathcal{E}$ sont parallèles ($\mathcal{V} \parallel \mathcal{W}$) s'ils ont la même direction ($\vec{\mathcal{V}} = \vec{\mathcal{W}}$).

Remarque. La relation $\mathcal{V} \parallel \mathcal{V}'$ est une relation d'équivalence.

Théorème (Postulat V de Proclus, Playfair)
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Soient $\mathcal{V}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ et $P \in \mathcal{E}$ un point de $\mathcal{E}$. Alors il existe un et seulement un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ passant par P et parallèle à $\mathcal{V}$.

Preuve.
On pose $\mathcal{V}_1 := P \dotplus \vec{\mathcal{V}}$. Alors $\mathcal{V}_1$ est un sous-espace affine passant par P et parallèle à $\mathcal{V}$.

Il reste montrer l'unicité.

Soit $\mathcal{V}'$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ passant par P et parallèle au $\mathcal{V}$. Observons que $P \in \mathcal{V}'$ donc $\mathcal{V}' = P \dotplus \vec{\mathcal{V}}'$ (Lemme 11). Mais $\mathcal{V}' = P \dotplus \vec{\mathcal{V}}$ car $\mathcal{V}' \parallel \mathcal{V}$. Donc $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}'$. ∎

Définition 8. Un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de dimension 1 (resp. 2, resp. $\dim \mathcal{E} - 1$) on appelle une droite (affine) (resp. un plan (affine), resp. un hyper-plan (affine)).

Théorème 13. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Deux hyperplans de $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_1$ sont parallèles ssi $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}_1 = \emptyset$ ou $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$.

Preuve. On a

$$\mathcal{H} = P \dotplus H \quad , \quad \mathcal{H}_1 = P_1 \dotplus H_1$$

où $P \in \mathcal{H}$, $P_1 \in \mathcal{H}_1$ et $\dim H = \dim H_1 = \dim \mathcal{E} - 1$.

"$\Rightarrow$" Supposons que $\mathcal{H} \parallel \mathcal{H}_1$. Alors $H = H_1$. Donc $\mathcal{H} = P \dotplus H$ et $\mathcal{H}_1 = P_1 \dotplus H$.

Si $Q \in \mathcal{H} \cap \mathcal{H}_1$ alors $\mathcal{H} = Q \dotplus H$ et $\mathcal{H}_1 = Q \dotplus H$ par Lemma 2. Donc $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$.

"$\Leftarrow$" Si $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$ alors $\mathcal{H} \parallel \mathcal{H}_1$.

Supposons que $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}_1 = \emptyset$. Supposons que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_1$ ne sont pas parallèles, donc $H \neq H_1$. Soit $h \in H$ et $h \notin H_1$. On a

$$H_1 + \mathrm{Vect}(h) = \mathbb{E} \text{ car } \dim H_1 = \dim \mathcal{E} - 1.$$

Donc $\overrightarrow{PP_1} = h_1 + th$. D'où

$$P \dotplus (h_1 + th) = P_1, \text{ donc}$$

$$\mathcal{H} \ni P \dotplus th = P_1 \dotplus (-h_1) \in \mathcal{H}_1.$$

Donc $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}_1 \neq \emptyset$, mais on a supposé que $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}_1 = \emptyset$. C'est une contradiction, donc $\mathcal{H} \parallel \mathcal{H}_1$. ∎

Théorème (Postulat 1 et l'unicité) Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Par deux points distincts A et B de $\mathcal{E}$ passe une et une seule droite.

Preuve.

Soit $L := \mathrm{Vect}(\overrightarrow{AB})$. Alors $\dim L = 1$ et $\mathcal{L} := A \dotplus L$ est une droite passant par A et par $B = A \dotplus \overrightarrow{AB}$.

Soit $\mathcal{L}'$ une droite telle que $A, B \in \mathcal{L}'$. Alors Lemme 11 implique que $\mathcal{L}' = A \dotplus \vec{\mathcal{L}'}$, où $\vec{\mathcal{L}'}$ sous-espace vectoriel de $\vec{\mathcal{E}}$ de dimension 1.

$B \in \mathcal{L}'$ donc il existe $v \in \vec{\mathcal{L}'}$ t.q. $B = A \dotplus v$. Donc $v = \vec{AB} \in \vec{\mathcal{L}'}$.

Donc $L = \mathrm{Vect}(\vec{AB}) \subset \vec{\mathcal{L}'}$, donc $L = \vec{\mathcal{L}'}$.

Donc la droite passant par A et B est unique. ■

<u>Théorème 14</u>. Une intersection non-vide d'une famille de sous-espaces affines est un sous-espace affine.

<u>Éléments remarquable de $GA(\mathcal{E})$</u>.

<u>Définition 9</u>. Un morphisme affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ s'appelle **homothétie** de rapport $\lambda \neq 0, 1$ si $\vec{f} = \lambda \, \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{E}}}$ (resp. homothétie de rapport 1 si $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$).

<u>Proposition 15</u>. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une homothétie de rapport $\lambda \neq 1$. Alors f possède

un unique point fixe Ω et alors

$$f(X) = \Omega \dot{+} \lambda \overrightarrow{\Omega X}$$

On dit alors que f est une homothétie de centre Ω et de rapport λ.

Définition 10. Un morphisme affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ s'appelle symétrie (resp. projection) affine si f possède un point fixe et si $\vec{f}$ est une symétrie (resp. projection) linéaire.

Étudier des sous-groupes de $GA(\mathcal{E})$ engendrés par des homothéties, symétries, translations, ..

Étudier des morphismes affines f, qui n'ont pas de points fixes, tels que $\vec{f}$ est une symétrie, projection... .

On n'a pas de distance dans un espace affine, mais on peut comparer des vecteurs sur la même droite affine.

<u>Définition 11</u>. Soient A, B, C, D des quatre points sur la même droite affine. Supposons que $C \neq D$. Alors $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{CD}$ pour certain $\lambda \in K$. On pose

$$\overrightarrow{AB} : \overrightarrow{CD} \ \left(\text{ou } \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}\right) := \lambda.$$

<u>Théorème 16</u>. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ un morphisme affine.

i) Si $\mathcal{V}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ alors $f(\mathcal{V})$ est un sous-espace affine de $\mathcal{F}$;

ii) Si $\mathcal{V} \parallel \mathcal{V}_1$ alors $f(\mathcal{V}) \parallel f(\mathcal{V}_1)$;

iii) Si $A, B, C \in \mathcal{E}$ trois points distincts alignés et si $f(A), f(B), f(C)$ sont aussi tous distincts alors $f(A), f(B), f(C)$ sont alignés et

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{\overrightarrow{f(A)f(B)}}{\overrightarrow{f(A)f(C)}}.$$