Barycentre

$\mathcal{E}$ un espace affine

Proposition B.1. Soient $\mathcal{E}$ un espace affine et $A_0, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ et soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tels que $\Lambda := \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \neq 0$. Alors il existe un unique $G \in \mathcal{E}$ tel que

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = 0.$$

De plus $G = Q \dot{+} \frac{1}{\Lambda}\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{QA_i}\right)$, où $Q \in \mathcal{E}$ un point quelconque.

Preuve. Soit $Q \in \mathcal{E}$. Alors pour $\Omega \in \mathcal{E}$, on a

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{QA_i} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (\overrightarrow{Q\Omega} + \overrightarrow{\Omega A_i}) = \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i\right) \overrightarrow{Q\Omega} + \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{\Omega A_i}.$$

Donc

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{\Omega A_i} = 0 \quad \text{ssi} \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{QA_i} = \Lambda \cdot \overrightarrow{Q\Omega},$$

donc ssi $\overrightarrow{Q\Omega} = \frac{1}{\Lambda}\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{QA_i}\right)$, donc

ssi $$\Omega = Q \dot{+} \frac{1}{\Lambda}\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{QA_i}\right).$$

Donc pour $G = \Omega$ on a $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = 0$. De plus G est donné par la formule demandé.

Montrons unicité de G. Si $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{G_k A_i} = 0$

pour $k = 1, 2$ alors

$$\Lambda \cdot \overrightarrow{G_1 G_2} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{G_1 G_2} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{G_1 A_i} + \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{A_i G_2} = 0 .$$

Donc $\overrightarrow{G_1 G_2} = 0$, d'où $G_1 = G_2$. ■

Définition. B.1. Le point G on appelle le barycentre du système pondéré $(A_i, \lambda_i)_{i=0}^{n}$ de masse non nulle $\Lambda = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i$.

Exercice. Si $\alpha \neq 0$ alors G est aussi le barycentre du système pondéré $(A_i, \alpha\lambda_i)_{i=0}^{n}$.

Proposition B.2. (Associativité de barycentre). Soient $A_0^{(1)}, \ldots A_{n_1}^{(1)}, A_0^{(2)} \ldots, A_0^{(k)}, \ldots, A_{n_k}^{(k)} \in \mathcal{E}$. Soient $\lambda_0^{(1)}, \ldots \lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_0^{(2)}, \ldots \lambda_0^{(k)}, \ldots, \lambda_{n_k}^{(k)} \in K$ tels que

$\sum_{\beta=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{n_\beta} \lambda_\alpha^{(\beta)} \neq 0$ et pour chaque $1 \leq j \leq k$,

$\Lambda_j := \sum_{\alpha=0}^{n_j} \lambda_\alpha^{(j)} \neq 0$. Soient G_j le barycentre du système pondéré $(A_\alpha^{(j)}, \lambda_\alpha^{(j)})_{\alpha=0}^{n_j}$ pour $1 \leq j \leq k$.

Alors le barycentre G du système pondéré $(A_\alpha^{(\beta)}, \lambda_\alpha^{(\beta)})_{\beta=1, \alpha=0}^{k, n_\beta}$ est aussi le barycentre du système pondéré $(G_j, \Lambda_j)_{j=1}^{k}$.

Preuve. Pour $1 \leqslant j \leqslant k$ on a

$$\sum_{\alpha=0}^{n_j} \lambda_\alpha^{(j)} \overrightarrow{G_j A_\alpha^{(j)}} = 0.$$

Donc

$$0 = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{n_j} \lambda_\alpha^{(j)} \overrightarrow{GA_\alpha^{(j)}}$$ (car G est le barycentre...)

$$= \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{\alpha=0}^{n_j} \lambda_\alpha^{(j)} \left(\overrightarrow{GG_j} + \overrightarrow{G_j A_\alpha^{(j)}} \right) \right) = \sum_{j=1}^{k} \Lambda_j \overrightarrow{GG_j} + \sum_{j=1}^{k} \overbrace{\left(\sum_{\alpha=0}^{n_j} \lambda_\alpha^{(j)} \overrightarrow{G_j A_\alpha^{(j)}} \right)}^{0}$$

car G_j est le barycentre du système $(A_\alpha^{(j)}, \lambda_\alpha^{(j)})_{\alpha=0}^{n_j}$.

Donc $$\sum_{j=1}^{k} \Lambda_j \overrightarrow{GG_j} = 0.$$ ∎

Proposition B.3. Soient $A_0, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $\exists\, 0 \leqslant k \leqslant n$, tel que la famille $\overrightarrow{A_kA_0}, \dots \overrightarrow{A_kA_{k-1}}, \overrightarrow{A_kA_{k+1}}, \dots, \overrightarrow{A_kA_n}$ est libre ;

ii) pour chaque $0 \leqslant k \leqslant n$, la famille $\{\overrightarrow{A_kA_i} \mid i \in \{0, 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}$ est libre ;

iii) $\dim \operatorname{Vect}\{\overrightarrow{A_iA_j} \mid i,j \in \{0,1,\dots,n\}\} = n$.

Preuve. On peut faire en TD. ∎

Définition B.2. Soient $A_0, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$. On dit que $A_0, A_1, \dots, A_n$ sont affinement libres si $A_0, A_1, \dots, A_n$ satisfont une des conditions de Proposition B.3.

Définition B.3. On dit que le système (la suite) des points $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ de $\mathcal{E}$ est une base affine de $\mathcal{E}$ si: $A_0, A_1, \dots, A_n$ sont affinement libres et si $\dim \mathcal{E} = n$.

Proposition B.4. Soit $(A_0, \dots, A_n)$ une base affine de $\mathcal{E}$. Soit $P \in \mathcal{E}$ un point quelconque. Alors il existe une suite $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in K^{n+1}$ telle que

i) $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$,

ii) P est le barycentre du système pondéré $(A_i, \lambda_i)_{i=0}^{n}$,

iii) la suite $(\lambda_0, \ldots \lambda_n)$ satisfaisant i) et ii) est unique,

iv) Soit Q un point quelconque de $\mathcal{E}$. Alors $P = Q \dot{+} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{QA_i}$.

Preuve.

$$P = A_0 \dot{+} \overrightarrow{A_0P}.$$

$\overrightarrow{A_0P} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \overrightarrow{A_0A_i}$ car $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}$ une base de $\vec{\mathcal{E}}$.

Donc $0_{\vec{\mathcal{E}}} = -\overrightarrow{A_0P} + \sum_{i=1}^{n} \mu_i (\overrightarrow{A_0P} + \overrightarrow{PA_i}) =$

$\overrightarrow{PA_0} - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \overrightarrow{PA_0} + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \overrightarrow{PA_i} =$

$(1 - \sum_{i=1}^{n} \mu_i) \overrightarrow{PA_0} + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \overrightarrow{PA_i}$.

Posons $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} \mu_i$ et $\lambda_i = \mu_i$ pour $1 \leq i \leq n$.

Alors $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$ et $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{PA_i} = 0$, donc

P est le barycentre du système pondéré $(A_i, \lambda_i)_{i=0}^{n}$.

On a $P = A_0 \dot{+} \overrightarrow{A_0P} = A_0 \dot{+} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}$,

Donc $(\lambda_1, \ldots \lambda_n)$ sont unique, donc la suite $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est unique.

Le point iv) c'est la formule pour le barycentre de la Proposition B.1.

$(G = Q + \frac{1}{\Lambda}(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{QA_i}))$. ∎

Définition B.4. Soit $(A_0, \dots, A_n)$ une base affine de $\mathcal{E}$. Soit $P \in \mathcal{E}$. La suite $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^{n+1}$ telle que

$$\text{i)} \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1,$$

$$\text{ii)} \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{PA_i} = 0_{\vec{\mathcal{E}}}$$

s'appelle les coordonnées barycentrique de P dans la base affine $(A_0, \dots, A_n)$ de $\mathcal{E}$.

Proposition B.5. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ un morphisme affine. Soit G le barycentre du système pondéré $(A_i, \lambda_i)_{i=0}^{n}$ avec $\Lambda = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \neq 0$. Alors $f(G)$ est le barycentre du système pondéré $(f(A_i), \lambda_i)_{i=0}^{n}$.

Preuve. $G = Q \dot{+} \Lambda^{-1} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{QA_i}$ implique

$$f(G) = f(Q) \dot{+} \Lambda^{-1} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \vec{f}(\overrightarrow{QA_i}) = f(Q) \dot{+} \Lambda^{-1} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overrightarrow{f(Q)f(A_i)}.$$

∎

ORIENTATION

Le corps $K = \mathbb{R}$ - nombres réels

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel de dimension $n > 0$. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ deux bases de $\mathbb{E}$.

On dit que $\mathcal{B} \sim \mathcal{C}$ ssi

$$\text{dét}\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right) > 0.$$

Observons que $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble de toutes bases de $\mathbb{E}$. Il y a exactement deux classes d'équivalence :

la classe de $(e_1, e_2, \dots, e_n)$

et

la classe de $(e_2, e_1, e_3, \dots, e_n)$.

Définition. Orienter l'espace vect. réel $\mathbb{E}$, c'est chosir une de ces classes. Une base dans la classe choisie, on appelle une base directe. Une base, qui n'est pas dans la classe choisi, n'est pas directe.

Définition. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine tel que $\vec{\mathcal{E}}$ est un espace vect. réel. Orienter $\mathcal{E}$, c' est orienter l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$.

§ 2. GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

$\mathbb{R}$ – corps de nombres réels,
tous espaces vectoriels sont sur $\mathbb{R}$.

Définition 1. On dit que un espace affine $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien si e.v. $\vec{\mathcal{E}}$ est muni d'un produit scalaire, que on note
$$\langle\ ,\ \rangle : \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Définition 2. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien (e.aff.eu.). La fonction
$$d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$$
définie par $d(P,Q) := \langle \vec{PQ}, \vec{PQ} \rangle^{\frac{1}{2}} = \|\vec{PQ}\|$ s'appelle métrique (distance) sur $\mathcal{E}$.

Exercice. La fonction $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ est une métrique sur $\mathcal{E}$.

Définition 3. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine eucl., Un morphisme affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une isométrie affine (ou isométrie) si: $\forall (P,Q) \in \mathcal{E}^2$, $d(f(P), f(Q)) = d(P,Q)$.

Proposition 1. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien. Un morphisme affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une isométrie si et seulement si $\vec{f} : \vec{\mathcal{E}} \to \vec{\mathcal{E}}$ est une isométrie linéaire de $\vec{\mathcal{E}}$ (c'est-à-dire $\forall (x,y) \in \vec{\mathcal{E}}^2$, $\langle \vec{f}(x), \vec{f}(y) \rangle = \langle x, y \rangle \iff \forall x \in \vec{\mathcal{E}}$, $\|\vec{f}(x)\| = \|x\|$).

Preuve. On suppose que $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une isométrie affine. Donc $\forall (P,Q) \in \mathcal{E}^2$,

$$d(f(P), f(Q)) = d(P,Q).$$

Donc $\forall (P,Q) \in \mathcal{E}^2$,

$$\|\vec{f}(\overrightarrow{PQ})\| = \|\overrightarrow{f(P),f(Q)}\| = \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

Donc $\forall v \in \vec{\mathcal{E}}$, $\|\vec{f}(v)\| = \|v\|$, donc $\vec{f}$ est une isométrie linéaire.

Supposons que $\vec{f} : \vec{\mathcal{E}} \to \vec{\mathcal{E}}$ est une isométrie linéaire. Alors

$d(f(P), f(Q)) = \|\overrightarrow{f(P),f(Q)}\| = \|\vec{f}(\overrightarrow{PQ})\|$ car f est un morphisme affine

$= \|\overrightarrow{PQ}\|$ car $\vec{f}$ isométrie linéaire

$= d(P,Q)$. Donc f est une isométrie affine. ∎

Déf. Soit Π un plan affine euclidien.

- Un morphisme affine $f : \Pi \to \Pi$ s'appelle rotation du centre $P \in \Pi$, si P est un point fixe de f et si $\vec{f} \in SO(\vec{\Pi})$.

- Un morphisme affine $f : \Pi \to \Pi$ s'appelle une symétrie orthogonale par rapport à la droite affine d, si f possède un point fixe P appartenant à d et si $\vec{f}$ est une symétrie orthogonale par rapport à $\vec{d}$.

- Un morphisme affine $p : \Pi \to \Pi$ s'appelle une projection orthogonale sur d si p possède un point fixe appartenant à d et si $\vec{p}$ est une projection orthogonale sur $\vec{d}$.

Exemples des espaces affine euclidien.

1. $A^n_{\mathbb{R}}$ avec $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

2. On considère $\mathbb{C}$ comme l'espace vect. réel et on le note $\mathbb{C}$. L'espace affine est l'ensemble $\mathbb{C}$. L'espace de directions $\vec{\mathbb{C}}$ est $\mathbb{C}$, $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $(z, v) \longmapsto z + v$,

Le produit scalaire sur $\mathbb{C}$ est donné par $\langle v, v_1 \rangle := \mathrm{Re}(v \cdot \bar{v}_1)$.

On choisi l'orientation $1, i$ de $\mathbb{C}$.

Soit $\mathbb{E}$ un espace vect. euclidien.

On note

$O(\mathbb{E})$ – groupe des isométries linéaires de $\mathbb{E}$

$SO(\mathbb{E})$ – groupe des isométries linéaires de $\mathbb{E}$ de déterminant 1.

$O(\mathbb{E})$ et $SO(\mathbb{E})$ sont des groupes des transformations de $\mathbb{E}$.

Groupes des matrices

$$GL(n,\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\},$$

$$O(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA\,A = Id_n\},$$

$$SO(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = Id\ , \det A = 1\}.$$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{E}$. Alors les applications

$$O(\mathbb{E}) \xrightarrow{\sim} O(n,\mathbb{R})\ ,\ f \longmapsto M_{\mathcal{B}}(f)$$

et

$$SO(\mathbb{E}) \xrightarrow{\sim} SO(n,\mathbb{R})\ ,\ f \longmapsto M_{\mathcal{B}}(f)$$

sont des isomorphismes de groupes.

La fonction $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ est définie par $\exp z = e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

On définie

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\ ,\quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}\ ,\quad \operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}.$$

Leurs restrictions à $\mathbb{R}$, sont des fonctions de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

La fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement decroissante sur $[0,2]$, $\cos 0 = 1$ et $\cos 2 < 0$, donc il existe un unique nombre réel entre 0 et 2, que on note $\frac{\pi}{2}$, tel que $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Posons
$$U(1) := \{ z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1 \}.$$
$U(1)$ est un groupe commutatif.

Théorème.

i) L'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{C}, +)$ sur $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$ de noyau
$$\ker \exp = 2\pi i \mathbb{Z}.$$

ii) L'application
$$E : \mathbb{R} \to U(1), \quad t \longmapsto e^{it} = \cos t + i \sin t$$
est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur $(U(1), \cdot)$ de noyau
$$\ker E = \{ 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \} = 2\pi \mathbb{Z}.$$

Isométries du plan vectoriel euclidien

Soient $\mathbb{E}$ un plan vect. euclidien, orienté et e_1, e_2 une base directe orthonormée de $\mathbb{E}$.

Soit $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ une isométrie linéaire et $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice de f dans la base e_1, e_2. Alors $A \in O(2)$.

Rappelons que

$$O(2) = \{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = Id_2 \}$$

et

$$SO(2) = \{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = Id_2 \text{ et } \det A = 1 \}.$$

Lemme I.1. On a

i) $SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a^2 + b^2 = 1 \right\}$

ii) $O(2) = SO(2) \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a^2 + b^2 = 1 \right\}$.

Preuve.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in O(2)$. Alors

$$a^2 + b^2 = 1,\quad a^2 + c^2 = 1,\quad b^2 + d^2 = 1,\quad ab + cd = 0.$$

Donc $c = \pm\sqrt{1-a^2} = \varepsilon b$, $d = \pm\sqrt{1-b^2} = \varepsilon_1 a$ où $\varepsilon, \varepsilon_1 \in \{1, -1\}$.

$ab + cd = 0$ implique $ab + \varepsilon\varepsilon_1 ab = 0$.

Donc $(1 + \varepsilon\varepsilon_1) ab = 0$.

1 cas. $ab = 0$ $\left|\begin{array}{l} \text{si } a = 0,\ b = \pm 1,\ d = 0,\ c = \pm 1 \\ \text{si } b = 0\ \ a = \pm 1,\ c = 0,\ d = \pm 1 \end{array}\right.$

2 cas, $1 + \varepsilon\varepsilon_1 = 0$ implique $\varepsilon\varepsilon_1 = -1$.

Donc $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon_1 = -1$ ou $\varepsilon = -1$ et $\varepsilon_1 = 1$,

Donc $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \in O(2) \setminus SO(2)$ ou $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in SO(2)$

$\blacksquare$

On considère $\mathbb{C}$ comme un esp. vect. réel, muni d'un produit scalaire

$$\langle z, w \rangle := \mathrm{Re}(z \cdot \overline{w})$$

et d'une orientation telle que la base orthonormée $1, i$ est directe.

Soit $z = a + bi \in \mathbb{C}$ $((a,b) \in \mathbb{R}^2)$.

La multiplication par z,

$$m_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

est une application $\mathbb{C}$-linéaire, donc aussi $\mathbb{R}$-linéaire. La matrice de m_z dans la base $1, i$ est

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Lemme I.2.

i) L'application

$$\Psi : \mathbb{C} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$$

définie par $\Psi(a+bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, est un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbre, c'est-à-dire Ψ est $\mathbb{R}$-linéaire et $\Psi(z_1 \cdot z_2) = \Psi(z_1) \cdot \Psi(z_2)$.

ii) L'application

$$\varphi : U(1) \longrightarrow SO(2)$$

définie par $\varphi(a+bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est un isomorphisme des groupes.

iii) $SO(2)$ est un groupe abelien (commutatif).

Preuve.

i) est facile.

ii) L'application Ψ est injective.

Si $a+bi \in U(1)$ alors $a^2+b^2=1$, donc $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in SO(2)$. L'application φ est donc bien définie, elle est injective.

Si $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in SO(2)$ alors $a^2+b^2=1$, donc $a+bi \in U(1)$. Donc φ est aussi surjective, donc c'est un isomorphisme de groupes.

iii) $U(1)$ est abelien, donc $SO(2)$ est abelien. ∎

Lemme I.3. Soit $\mathbb{E}$ un plan vectoriel euclidien orienté. Soit $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ une isométrie telle que $\det f = 1$. Alors la matrice de f est la même dans n'importe quelle base orthonormée directe de $\mathbb{E}$. La matrice de f dans une base orthonormée, qui n'est pas directe, est la transposée de la matrice de f dans une base directe.

Preuve. Soit A la matrice de f dans une base orthonormée directe v_1, v_2. Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ une autre base orthonormée directe. Alors la matrice de f dans la base $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ est

$$ {}^tP \cdot A \cdot P $$

où P est une matrice de passage

entre des bases orthonormée directe.

Mais ${}^tPAP = {}^tPPA$ (car $SO(2)$ est commutatif)

$= Id_2 \cdot A = A$ (car P est orthogonale).

La base v_2, v_1 n'est pas directe.
La matrice de f dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

■

Donc on a l'isomorphisme canonique

$$M : SO(\mathbb{E}) \xrightarrow{\sim} SO(2),$$

qui à une isométrie f associe la matrice de f dans une base orthonormée directe, et qui ne dépend pas de la choix d'une base orthonormée directe.

<u>Lemme I.4</u>. Soit $\mathbb{E}$ un plan vect. euclidien. Soient v et w deux vecteurs de $\mathbb{E}$ de norme 1. Alors il existe l'unique isométrie f de $\mathbb{E}$ de déterminant 1 (donc dans $SO(\mathbb{E})$) telle que

$$f(v) = w.$$

Preuve. Soient v, v_1 une base orthonormée directe et w, w_1 une autre base orthonormée directe.

Alors $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ définie par $f(v) = w$, $f(v_1) = w_1$ appartient à $SO(\mathbb{E})$.

Soit $g : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ une autre isométrie telle que $g(v) = w$. Alors $v_1 \perp v$ implique $g(v_1) \perp g(v) = w$. Donc $g(v_1) = w_1$ ou $g(v_1) = -w_1$. Mais si $g(v) = w$ et $g(v_1) = -w_1$ alors $\det(g) = -1$. Donc f est l'unique. ∎