Angles

Soit $\mathbb{E}$ un plan vectoriel, euclidien,

Soit $S(\mathbb{E}) := \{ v \in \mathbb{E} \mid \|v\| = 1 \}$.

Soient $(v, v_1) \in S(\mathbb{E})^2$ et $(w, w_1) \in S(\mathbb{E})^2$.

On dit que

$(v, v_1) \sim (w, w_1)$ s'il existe $f \in SO(\mathbb{E})$ tel que $f(v) = w$ et $f(v_1) = w_1$.

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $S(\mathbb{E})^2$. Une classe d'équivalence pour la relation $\sim$ s'appelle angle. Si $(v, v_1) \in S(\mathbb{E})^2$, on note $\widehat{v, v_1}$ la classe d'équivalence de (v, v_1). ($\widehat{v, w}$ se lit « angle des vecteurs v, w »).

L'ensemble de classes d'équivalence on note $\widehat{\mathbb{E}}$.

Propriétés des angles

A.1. Si $\alpha \in \widehat{\mathbb{E}}$ et $v \in S(\mathbb{E})$ alors $\exists! \, w \in S(\mathbb{E})$ t.q. $\alpha = \widehat{v, w}$.

Preuve. Si $\alpha \in \widehat{\mathbb{E}}$, alors $\alpha = \overset{\measuredangle}{x,y}$ pour certains $x, y \in S(\mathbb{E})$. Par Lemme I.4 $\exists\, f \in SO(\mathbb{E})$ t.q. $f(x) = y$. Soit $w = f(v)$. Par Lemme I.4 $\exists\, g \in SO(\mathbb{E})$ t.q. $g(x) = v$. Alors $g(y) = g(f(x)) = f(g(x))$ car $SO(\mathbb{E})$ est un groupe commutatif. Donc $g(y) = f(v) = w$. Donc $\alpha = \overset{\measuredangle}{x,y} = \overset{\measuredangle}{v,w}$, et w est unique car $\overset{\measuredangle}{v,w} = \overset{\measuredangle}{v,w_1}$ implique $w = w_1$.

Définition. Soient $\overset{\measuredangle}{v,v_1}, \overset{\measuredangle}{w,w_1} \in \widehat{\mathbb{E}}$. On pose
$$\overset{\measuredangle}{v,v_1} + \overset{\measuredangle}{w,w_1} = \overset{\measuredangle}{v,v_2}, \text{ où } \overset{\measuredangle}{w,w_1} = \overset{\measuredangle}{v_1,v_2}$$

(par A.1, tel v_2 existe et il est unique).

On doit montrer que le resultat ne depend pas de choix des representents dans des classes d'équivalences.

A.2. $\overset{\measuredangle}{v,v} = \overset{\measuredangle}{w,w}$ pour $v, w \in S(\mathbb{E})$ quelconque. (Par Lemme I.4) ■

On note $\overset{\measuredangle}{0} := \overset{\measuredangle}{v,v}$.

A.3. $\overset{\measuredangle}{v,-v} = \overset{\measuredangle}{w,-w}$ pour n'importe quel $v, w \in S(\mathbb{E})$.

Preuve: Par Lemme I.4 il existe $f \in SO(\mathbb{E})$ tel que $f(v) = w$. Mais alors $f(-v) = -w$. Donc $(v,-v) \sim (w,-w)$. ■

On pose

$$\varpi := \widehat{v,-v}.$$

L'angle $\widehat{v,-v}$ s'appelle l'angle plat.

A.4. Soit $R \in SO(\mathbb{E})$. Alors

$$\widehat{v,w} = \widehat{Rv,Rw}.$$

A.5. Soient $\alpha \in \hat{E}$ et $v \in S(\mathbb{E})$. Alors il existe unique $f \in SO(\mathbb{E})$ tel que

$$\alpha = \widehat{v,f(v)}$$ Mais alors $\alpha = \widehat{x,f(x)}$ pour n'import quel $x \in S(\mathbb{E})$.

Preuve. $\alpha = \widehat{v,w}$ pour certain w par A.1.

Par Lemme I.4, $\exists\, f \in SO(\mathbb{E})$ tel que $f(v) = w$. Donc $\alpha = \widehat{v,f(v)}$ pour l'unique $f \in SO(\mathbb{E})$.

Soit $x \in S(\mathbb{E})$. Alors $h(v) = x$ pour certain $h \in SO(\mathbb{E})$. $h(f(v)) = f(h(v)) = f(x)$. Donc $(v, f(v)) \sim (x, f(x))$. ∎

A.6. L'ensemble $\hat{\mathbb{E}}$ muni d'operation $+$ est un groupe commutatif.

Preuve. Soient $\alpha, \beta \in \hat{\mathbb{E}}$. Alors

$$\alpha = \widehat{v,Rv} \text{ et } \beta = \widehat{w,R_1w} \text{ où } v,w \in S(\mathbb{E}),$$

$R, R_1 \in SO(\mathbb{E})$.

$$\alpha + \beta = \widehat{v, Rv} + \widehat{w, R_1 w} = \widehat{v, Rv} + \widehat{Rv, R_1(Rv)}$$ par A.5

$$= \widehat{v, R_1(Rv)} = \widehat{v, (R_1 \circ R) v}$$

$$\beta + \alpha = \widehat{w, R_1 w} + \widehat{v, Rv} = \widehat{w, R_1 w} + \widehat{R_1 w, R(R_1 w)} =$$

$$= \widehat{w, R(R_1 w)} = \widehat{w, (R \circ R_1) w} = \widehat{w, (R_1 \circ R) w} = \widehat{v, (R_1 \circ R)(v)}$$

car $SO(\mathbb{E})$ est commutatif et par A.5.

Donc $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

$$\alpha + \hat{0} = \widehat{v, Rv} + \widehat{Rv, Rv} = \widehat{v, Rv} = \alpha$$

$$\alpha + \widehat{Rv, v} = \widehat{v, Rv} + \widehat{Rv, v} = \widehat{v, v} = \hat{0}$$

Il reste à vérifier que l'addition est associative. ∎

A.7. $\varpi + \varpi = \hat{0}$

Preuve. $\varpi + \varpi = \widehat{v, -v} + \widehat{-v, -(-v)} = \widehat{v, v} = \hat{0}$. ∎

A.8. Soit S une symétrie vectoriel orthogonale de $\mathbb{E}$ par rapport à une droite. Alors

$$\measuredangle_{v,w} = \measuredangle_{S(w),S(v)} = -\measuredangle_{S(v),S(w)} .$$

<u>Preuve.</u> Soit e_1, e_2 une base orthonormée de $\mathbb{E}$ telle que

$$S(e_1) = e_1 \ , \ S(e_2) = -e_2 .$$

Soit $R \in SO(\mathbb{E})$ tel que $w = R(v)$.

On vérifie que (on vérifie $M(S)\,M(R) = M(R^{-1})\,M(S)$)

$$S \circ R = R^{-1} \circ S .$$

Donc $$\measuredangle_{S(w),S(v)} = \measuredangle_{S(Rv),Sv} = \measuredangle_{R^{-1}S(v),S(v)} =$$

$$\measuredangle_{S(v),R(Sv)} = \measuredangle_{v,Rv} = \measuredangle_{v,w}$$ par A.4 et A.5.

Donc $$\measuredangle_{S(w),S(v)} = \measuredangle_{v,w} .$$ ∎

<u>Proposition A.9.</u> L'application

$$\mathcal{A} : SO(\mathbb{E}) \to \overset{\measuredangle}{\mathbb{E}}$$

définie par $\mathcal{A}(f) := \measuredangle_{v,f(v)}$

est un isomorphisme de groupes. ∎

Mesure d'un angle.

$\mathbb{E}$ un plan vectoriel, euclidien, orienté.

On rappelle :

$E : \mathbb{R} \to U(1)$, $t \mapsto e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\varphi : U(1) \xrightarrow{\simeq} SO(2)$, $a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

$M^{-1} : SO(2) \xrightarrow{\simeq} SO(\mathbb{E})$, $M(f)$ – la matrice de $f \in SO(\mathbb{E})$ dans une base orthonormée directe.

$\mathcal{A} : SO(\mathbb{E}) \xrightarrow{\simeq} \hat{\mathbb{E}}$, $f \mapsto \widehat{v, f(v)}$.

Soit $\rho := \mathcal{A} \circ M^{-1} \circ \varphi \circ E$,

donc $\rho : \mathbb{R} \to \hat{\mathbb{E}}$, $\rho(t) = \widehat{v, f_t(v)}$,

où $f_t \in SO(\mathbb{E})$ et $M(f_t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

Proposition MA1. Le morphisme ρ est surjectif et $\ker \rho = 2\pi\mathbb{Z}$. Donc ρ induit un isomorphisme des groupes

$$\bar{\rho} : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \hat{\mathbb{E}}. \quad \blacksquare$$

Définition. Soit $\alpha \in \hat{\mathbb{E}}$. On appelle mesure de l'angle α, l'ensemble de nombres réels

$$\rho^{-1}(\alpha) \left(\text{ou l'élément } \bar{\rho}^{-1}(\alpha) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \right).$$

Un élément de l'ensemble $\rho^{-1}(\alpha)$ on appelle une détermination de la mesure de l'angle α.

Le nombre réel $\Theta \in \rho^{-1}(\alpha)$ tel que

$$0 \leq \Theta < 2\pi$$

on appelle la détermination principale de la mesure de l'angle α.

Exemples:

La mesure de $\hat{0}$ est $2\pi\mathbb{Z}$. La détermination principale de la mesure de $\hat{0}$ est 0.

La mesure de ϖ est $\pi + 2\pi\mathbb{Z}$.

La mesure de $\varpi + \varpi$ ...

Définition. Soient $v, w \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$. On pose $\widehat{v, w} := \left(\widehat{\frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|}}\right)$.

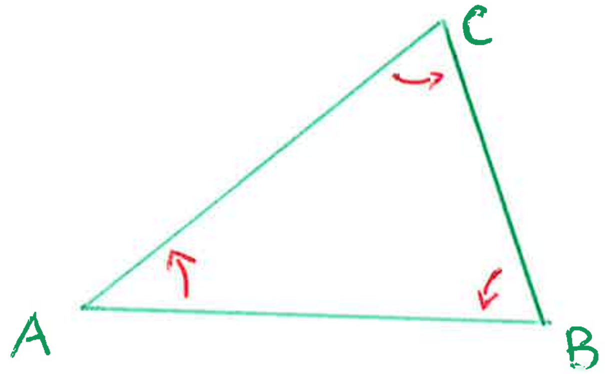
Soit Π un plan affine euclidien

Définition. On appelle un triangle ABC (de sommets A, B, C) une base affine A, B, C de Π.

L'ensemble

$$\Delta ABC = \{ P \in \Pi \mid \exists (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3 \text{ t. q. } \sum_{i=0}^{2} \lambda_i = 1, \forall i, \lambda_i \geqslant 0 \text{ et } \lambda_0 \vec{PA} + \lambda_1 \vec{PB} + \lambda_2 \vec{PC} = 0_{\vec{\Pi}} \}$$

s'appelle l'ensemble de points du triangle ABC.



On note $\widehat{BAC} := \widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}$.

Théorème. Pour tout triangle ABC,

$$\widehat{BAC} + \widehat{CBA} + \widehat{ACB} = \varpi .$$

Preuve.

$\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}} + \widehat{\vec{BC}, \vec{BA}} + \widehat{\vec{CA}, \vec{CB}} =$

$\widehat{\vec{BA}, \vec{CA}} + \widehat{\vec{BC}, \vec{BA}} + \widehat{\vec{CA}, \vec{CB}} =$ car $\widehat{v, w} = \widehat{-v, -w}$.

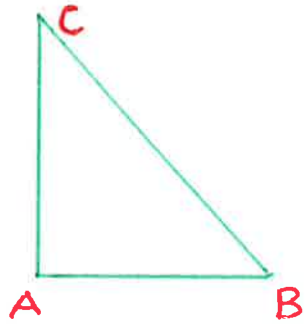
$\widehat{\vec{BC},\vec{CA}} + \widehat{\vec{CA},\vec{CB}} =$ car $\widehat{a,b} + \widehat{b,c} = \widehat{a,c}$.

$\widehat{\vec{BC},\vec{CB}} = \widehat{\vec{BC},-\vec{BC}} = \varpi$. $\blacksquare$

Théorème de Pythagore. Dans un triangle A, B, C,

$$\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle = 0 \quad \text{ssi} \quad \|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 = \|\vec{BC}\|^2.$$

Preuve.



On a $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$. Donc

$$\|\vec{BC}\|^2 = \langle \vec{BA} + \vec{AC}, \vec{BA} + \vec{AC} \rangle =$$

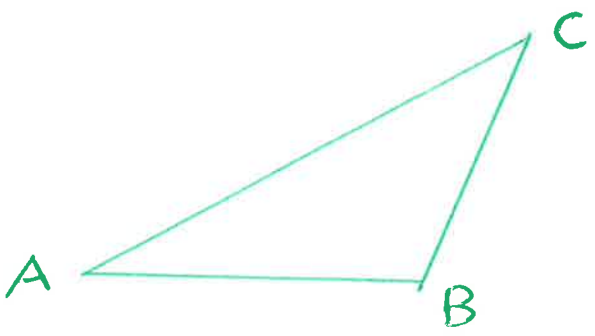
$$\|\vec{BA}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 + 2\langle \vec{BA}, \vec{AC} \rangle =$$

$$\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 - 2\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle.$$ Donc.. $\blacksquare$

Théorème. Dans un triangle ABC

$$\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle = \|\vec{AB}\| \, \|\vec{AC}\| \cos(\widehat{BAC})$$

Preuve.



Posons $v = \frac{1}{\|\vec{AB}\|}\vec{AB}$ et $w = \frac{1}{\|\vec{AC}\|}\vec{AC}$.

Soit $R \in SO(\vec{\Pi})$ t.q. $R(v) = w$. Soit v, v_1 une base orthonormée de $\vec{\Pi}$. On oriente $\vec{\Pi}$ en choisissant v, v_1. Dans la base v, v_1 la matrice de R est $A = \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}$, donc Θ est la mesure de $\widehat{v,w}$. Donc $w = R(v) = \cos\Theta\, v + \sin\Theta\, v_1$. Donc

$$\langle v, w\rangle = \langle v, \cos\Theta\, v + \sin\Theta\, v_1\rangle = \cos\Theta.$$

Si on oriente $\vec{\Pi}$ en choisissant v_1, v alors $-\Theta$ est la mesure de $\widehat{v,w}$. Mais $\cos(-\Theta) = \cos\Theta$. ∎

Définition. Soit $\mathbb{E}$ un plan vectoriel euclidien, orienté. Soient $v, w \in \mathbb{E}$ et soient (α_1, α_2), (β_1, β_2) les coordonnées de v et w dans une base orthonormée directe. On pose

$$[v, w] := \text{dét}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Exercice. Le nombre $[v, w]$ ne depend pas du choix d'une base orthonormée directe.

Définition. Soit Π un plan affine euclidien, orienté. On définit l'aire orienté de triangle ABC par

$$\mathrm{Aire}\,\Delta ABC := \frac{1}{2}[\vec{AB}, \vec{AC}]$$

et l'aire de triangle ABC par

$$\mathrm{aire}\,\Delta ABC := |\mathrm{Aire}\,\Delta ABC|.$$

Proposition. On a

$$\mathrm{Aire}\,\Delta ABC = \frac{1}{2}\|\vec{AB}\|\,\|\vec{AC}\|\sin(\widehat{BAC}).$$

Preuve.

Soient $v = \frac{1}{\|\vec{AB}\|}\cdot\vec{AB}$ et $w = \frac{1}{\|\vec{AC}\|}\vec{AC}$. Soit $R \in SO(\vec{\Pi})$ tel que $R(v) = w$. Soit v, v_1 une base orthonormée directe de $\vec{\Pi}$. La matrice de R dans cette base est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Donc $w = R(v) = \cos\theta\, v + \sin\theta\, v_1$.

Donc $\mathrm{Aire}\,\Delta ABC = \frac{1}{2}\left[\|\vec{AB}\|\,v, \|\vec{AC}\|\,w\right] =$

$\frac{1}{2}\|\vec{AB}\|\,\|\vec{AC}\|\,\mathrm{dét}\begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\|\vec{AB}\|\,\|\vec{AC}\|\sin\theta,$

où Θ est la mesure de l'angle $\widehat{v,w} = \widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}$.

Cercle euclidien

Π - un plan affine euclidien

Soit $Q \in \Pi$ un point et $r > 0$ un nombre réel. Le cercle de centre Q et de rayon r est l'ensemble

$$S(Q,r) := \{X \in \Pi \mid d(X,Q) = r\}.$$

Proposition. Soient S un cercle de centre O, $A \in S$ un point de S et d une droite passant par A.

i) La droite d est perpendiculaire à la droite (OA) ssi $S \cap d = \{A\}$.

ii) Si d n'est pas perpendiculaire à (OA) alors il existe $B \neq A$ tel que $S \cap d = \{A, B\}$.

Preuve.

Soit $0 \neq u \in \vec{d}$. Alors $d = \{A \dotplus tu \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Soit $M = A \dotplus tu$. Alors $\vec{OM} = \vec{OA} + tu$.

Donc

$$d(O,M)^2 = \|\vec{OM}\|^2 = \|\vec{OA} + tu\|^2 =$$

$$\|\vec{OA}\|^2 + 2t\langle \vec{OA}, u\rangle + t^2\|u\|^2.$$

Donc $M \in S$ ssi $d(O,M)^2 = \|\vec{OA}\|^2$ ssi

$$t\left(t\|u\|^2 + 2\langle \vec{OA}, u\rangle\right) = 0 \qquad (*)$$

Si $\langle \vec{OA}, u\rangle \neq 0$ alors l'équation a deux solutions distinctes donc $d \cap S = \{A, B\}$.

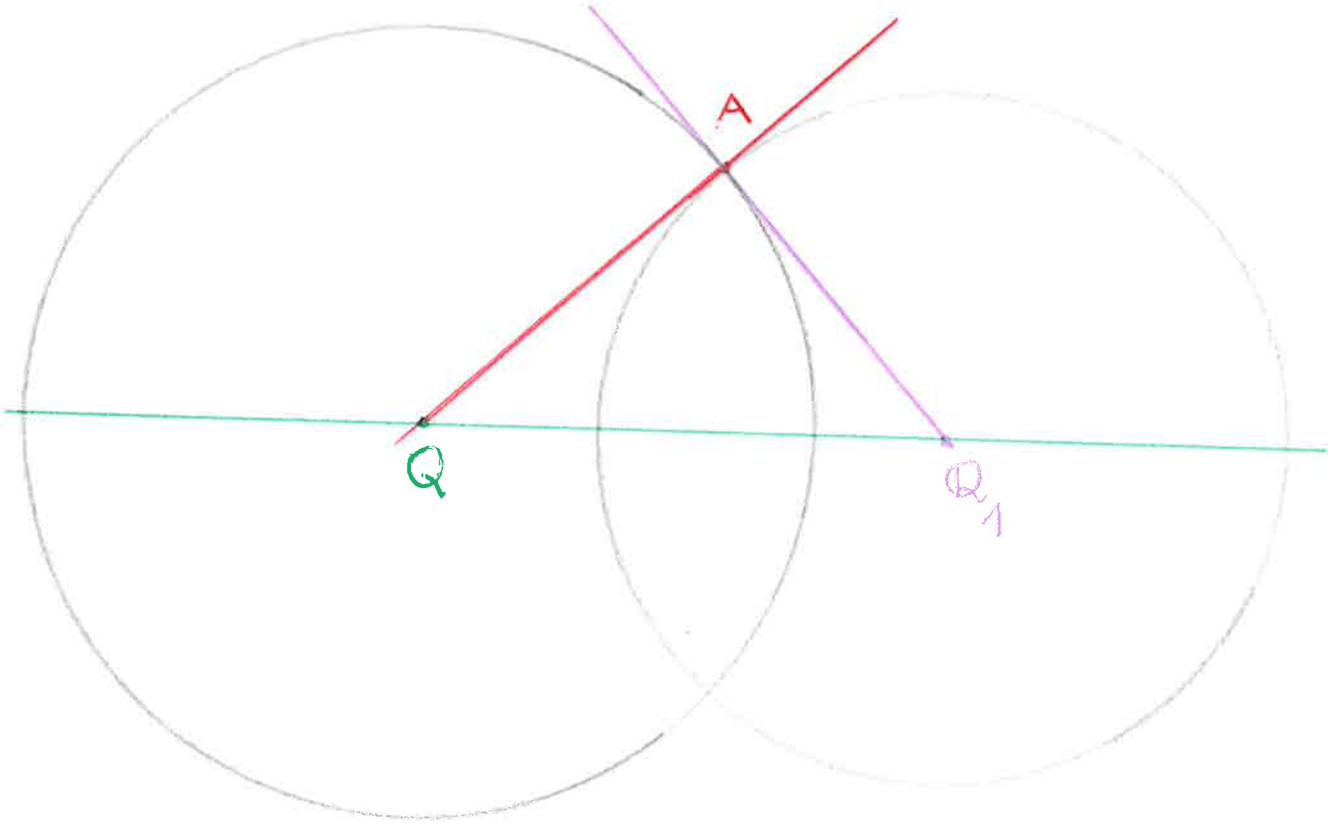
$\langle \vec{OA}, u\rangle = 0$ ssi l'équation a une seule solution $t = 0$ ssi $d \cap S = \{A\}$. ∎

Définition. Soit S un cercle de centre O et soit $A \in S$. Une droite d passant par A s'appelle tangente à S en A si $d \cap S = \{A\}$.

Exercice. La droite d est unique.

Exercice. $d \perp (OA)$.

Définition. Deux cercles sont dit orthogonaux s'ils se coupent en deux points et si en chaque point commun, les tangentes sont orthogonales.



Lemme. Soit Π un plan affine euclidien. Soient S et S_1 deux cercles de Π de centres Q et Q_1 et de rayons r et r_1. Les cercles S et S_1 sont orthogonaux ssi

$$r^2 + r_1^2 = d(Q, Q_1)^2 .$$

Preuve.

Soit $A \in S \cap S_1$. Soit t (resp. t_1) la tangente à S (resp. à S_1) en point A.

Observons que $t \perp (QA)$ et $t_1 \perp (Q_1 A)$.

Donc $t \perp t_1$ ssi $(QA) \perp (Q_1 A)$.

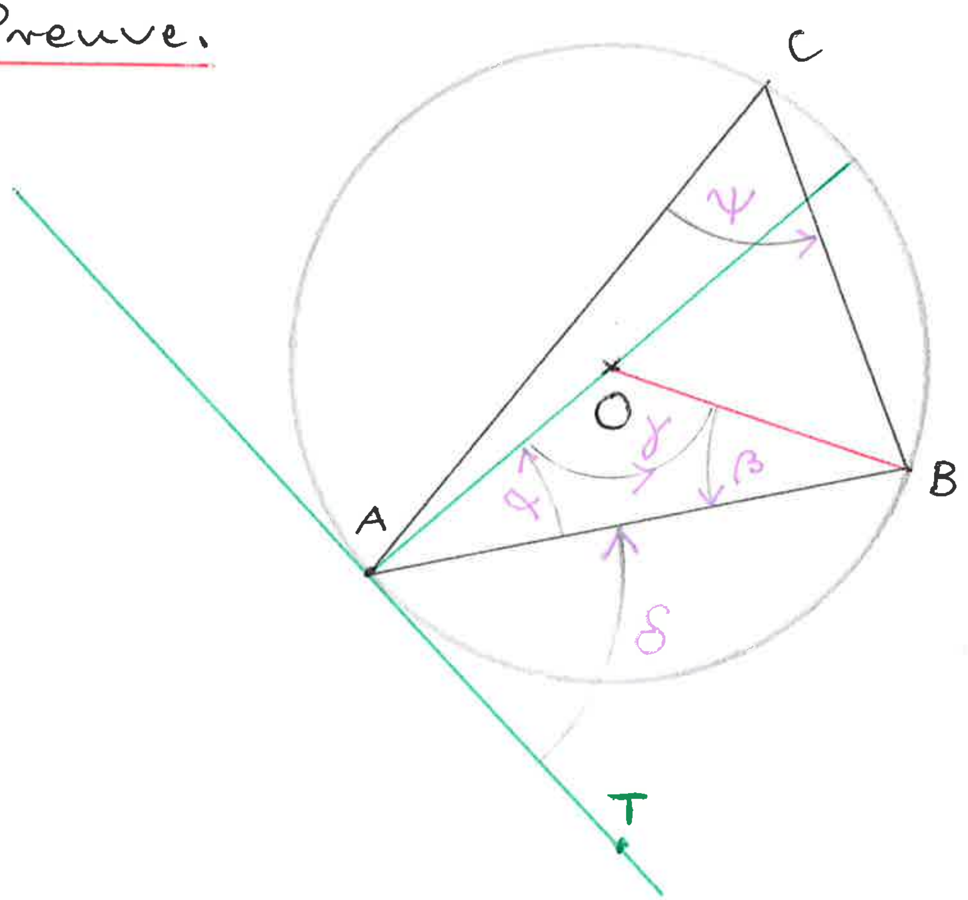
Donc ssi $r^2 + r_1^2 = d(Q, Q_1)^2$. ∎

Proposition 32 de la livre III de Euclide.

Soit S un cercle de centre O. Soient $A, B, C \in S$. Soit T un point du plan Π n'appartenant pas à S. La droite (AT) est tangente au cercle S ssi

$\widehat{TAB} = \widehat{ACB}$.

Preuve.



On sait que

(AT) tangente au cercle en A ssi

$(AT) \perp (OA)$.

$\Rightarrow$ Supposons que (AT) est tangente au S en A.

Dans $\triangle ABO$ on a

$$\alpha + \beta + \gamma = \varpi .$$

De plus $\|\vec{OA}\| = \|\vec{OB}\|$. Donc

$$\alpha = \beta , \text{ d'où}$$

$$\underline{2\alpha + \gamma = \varpi} .$$

$(AT) \perp (AO)$ implique que l'angle $\delta + \alpha$ est un angle droit, donc

$$\underline{2\delta + 2\alpha = \varpi} .$$

Donc $\gamma = 2\delta$.

On a aussi $\gamma = 2\Psi$ (Exercice).

Donc $2\delta = 2\Psi$, d'où

$\delta = \Psi$ ou $\delta + \varpi = \Psi$.

Donc $\delta = \Psi$.

$\Leftarrow$ On suppose $\delta = \Psi$. On a

$$\alpha + \alpha + \gamma = \varpi$$

et

$$\gamma = 2\Psi . \text{ (Exercice)}$$

Donc $2\alpha + \gamma = 2\alpha + 2\psi = 2\alpha + 2\delta = \varpi$.

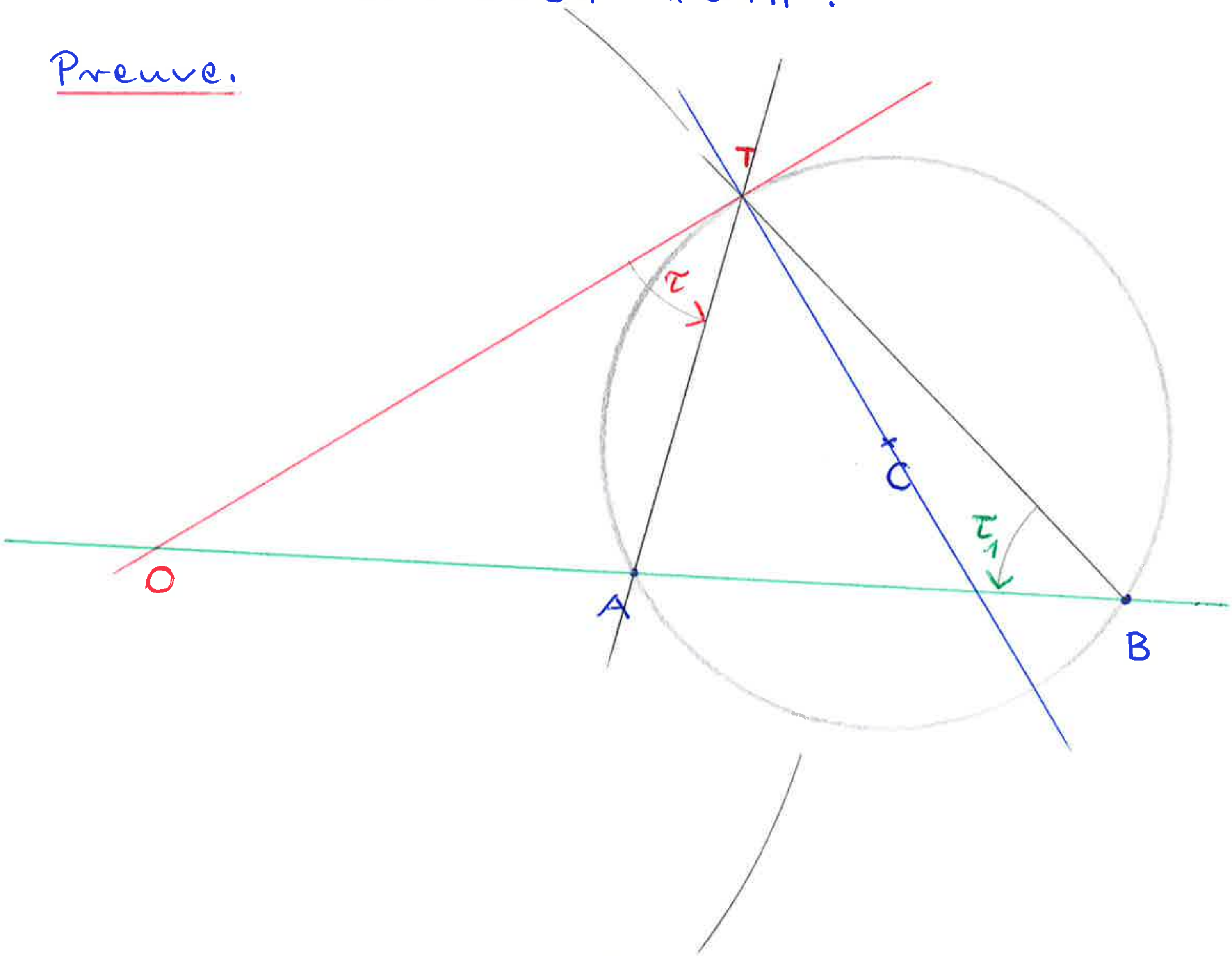
$$2(\alpha + \delta) = \varpi$$

implique $\alpha + \delta$ est un angle droit.

Donc $(AT) \perp (AO)$. ■

Corollaire. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre C. Soient $A, B, T \in \mathcal{C}$. Soit t la tangente à $\mathcal{C}$ en T. On suppose que les droites t et (AB) se coupent en O. Alors $\|\overrightarrow{OA}\| \, \|\overrightarrow{OB}\| = \|\overrightarrow{OT}\|^2$.

Preuve.



$\tau = \tau_1$ par Proposition 32 … .

$\underset{AOT}{\measuredangle} = \underset{BOT}{\measuredangle}$, donc

$\underset{TAO}{\measuredangle} = \underset{OTB}{\measuredangle}$.

Les triangles ΔOAT et ΔOBT ont les mêmes angles, donc ils sont semblables, donc

$$\frac{\|\overrightarrow{OA}\|}{\|\overrightarrow{OT}\|} = \frac{\|\overrightarrow{OT}\|}{\|\overrightarrow{OB}\|}.$$

Remarque. Si on pose $\|\overrightarrow{OT}\| = R$, alors $\|\overrightarrow{OA}\| \, \|\overrightarrow{OB}\| = R^2$.