Correction de la preuve de Lemme I.4.

Preuve. Soient v, v_1 une base orthonormée ~~directe~~ et w, w_1 une autre base orthonormée ~~directe~~ telle que la matrice de passage de l'une à l'autre a dét $= 1$.

Alors $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ définie par $f(v) = w$, $f(v_1) = w_1$ appartient à $SO(E)$.

Soit $g : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ une autre isométrie telle que $g(v) = w$. Alors $v_1 \perp v$ implique $g(v_1) \perp g(v) = w$.

Donc $g(v_1) = w_1$ ou $g(v_1) = -w_1$.

Mais si $g(v) = w$ et $g(v_1) = -w_1$ alors $\det(g) = -1$. Donc f est l'unique. ∎

Angle droit (dans Mesure d'un angle)

Définition. Soit $\mathbb{E}$ un plan vectoriel euclidien. Un angle $\alpha \in \hat{\mathbb{E}}$ est dit droit si $\alpha = \widehat{v,w}$ et $\langle v, w \rangle = 0$.

Proposition. Soient $v, w \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$. Alors

$\langle v, w \rangle = 0$ ssi $2\,\widehat{v,w} = \varpi$.

Preuve.

Supposons $\langle v, w \rangle = 0$. Soient $v_1 = \frac{v}{\|v\|}$ et $w_1 = \frac{w}{\|w\|}$. Alors v_1, w_1 est une base orthonormée de $\mathbb{E}$. Soit $f \in SO(\mathbb{E})$ tel que $f(v_1) = w_1$. Alors $f(w_1) \perp w_1$, donc $f(w_1) = v_1$ ou $f(w_1) = -v_1$.

Si $f(w_1) = v_1$ alors $\det f = -1$. Donc on a $f(w_1) = -v_1$.

D'où $\widehat{v_1, w_1} + \widehat{v_1, w_1} = \widehat{v_1, f(v_1)} + \widehat{f(v_1), f(f(v_1))} =$

$\widehat{v_1, w_1} + \widehat{w_1, f(w_1)} = \widehat{v_1, w_1} + \widehat{w_1, -v_1} = \widehat{v_1, -v_1} = \varpi$.

Supposons que $\widehat{v,w}+\widehat{v,w}=\varpi$. On peut supposer que $\|v\|=\|w\|=1$.

Soit $f\in SO(\mathbb{E})$ tel que <u>$f(v)=w$.</u>

Alors $\widehat{v,w}=\widehat{f(v),f(w)}=\widehat{w,f(w)}$. Donc

$$\widehat{v,w}+\widehat{v,w}=\widehat{v,w}+\widehat{w,f(w)}=\widehat{v,f(w)}.$$

D'où $\widehat{v,f(w)}=\widehat{v,-v}$ car $\varpi=\widehat{v,-v}$.

On a donc $f(w)=-v$. On a

$$\langle v,w\rangle=\langle f(v),f(w)\rangle=\langle w,-v\rangle=$$

$-\langle v,w\rangle$. Donc $\langle v,w\rangle=0$. $\blacksquare$

<u>Corollaire.</u> Soit $\mathbb{E}$ un plan vectoriel euclidien, orienté. La mesure d'un angle droit est $\frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z}$ ou $-\frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z}=\frac{3}{2}\pi+2\pi\mathbb{Z}$. $\blacksquare$

INVERSION

Définition. Soient Π un plan euclidien, $Q \in \Pi$, $k \in \mathbb{R}$ et $k > 0$. L'inversion de pôle (centre) Q et de puissance k est l'application

$$I_{Q,k} : \Pi \setminus \{Q\} \longrightarrow \Pi \setminus \{Q\}$$

telle que pour $\forall\, P \in \Pi \setminus \{Q\}$,

i) les points Q, P et $P' = I_{Q,k}(P)$ sont colinéaires,

ii) $\langle \overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QP'} \rangle = k \quad \left(\Longleftrightarrow \|\overrightarrow{QP}\| \cdot \|QP'\| = k \right)$.

On suppose que Π est l'espace euclidien, orienté $\mathbb{C}$.

Supposons que le point Q est $0 \in \mathbb{C}$. Alors l'inversion de pôle 0 et de puissance k est l'application

$$I_{0,k} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

telle que $\forall \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

i) $I_{0,k}(z) = tz$ pour certain $t \in \mathbb{R}$,

ii) $\langle z, I_{0,k}(z) \rangle = k$.

On a

$$\langle z, I_{0,k}(z) \rangle = \mathrm{Re}\left(z \cdot \overline{I_{0,k}(z)}\right) = \mathrm{Re}(z \cdot \overline{tz}) = t|z|^2.$$

Donc $\quad t|z|^2 = k$, d'où

$$\boxed{I_{0,k}(z) = \frac{k}{z \cdot \bar{z}} \cdot z = \frac{k}{\bar{z}}}$$

Plus généralement

$$I_{a,k} : \mathbb{C} \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{a\},$$

$$\boxed{I_{a,k}(z) = \frac{k}{\overline{z-a}} + a}$$

On a

$$\tau_a \circ I_{0,k} \circ \tau_{-a} = I_{a,k} \qquad \text{(TD)}$$

<u>Proposition</u>. Soit $I_{Q,k} : \Pi \setminus \{Q\} \rightarrow \Pi \setminus \{Q\}$ l'inversion de pôle Q et de puissance k. Soient $A, B \in \Pi \setminus \{Q\}$ et $A_1 = I_{Q,k}(A)$

et $B_1 = I_{Q,k}(B)$. Alors

$$d(A_1, B_1) = k \cdot \frac{d(A,B)}{d(Q,A)\, d(Q,B)} .$$

<u>Preuve.</u> On se place dans le plan complexe $\mathbb{C}$. Soient $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{Q\}$.
Alors $a_1 = I_{Q,k}(a) = \dfrac{k}{\overline{a-Q}} + Q$ et

$b_1 = I_{Q,k}(b) = \dfrac{k}{\overline{b-Q}} + Q$. Donc

$$a_1 - b_1 = (a_1 - Q) - (b_1 - Q) = \frac{k}{\overline{a-Q}} - \frac{k}{\overline{b-Q}} =$$

$$= k\, \frac{\overline{b-Q} - \overline{a-Q}}{\overline{a-Q} \cdot \overline{b-Q}} = k\, \frac{\overline{b-a}}{\overline{a-Q} \cdot \overline{b-Q}} \text{, d'où}$$

$$|a_1 - b_1| = k\, \frac{|b-a|}{|a-Q|\,|b-Q|} . \qquad \blacksquare$$

Définition. Soient $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ quatre points distincts. Le nombre

$$[z_1, z_2 ; z_3, z_4] := \frac{(z_1 - z_3)(z_4 - z_2)}{(z_1 - z_2)(z_4 - z_3)}$$

s'appelle le birapport de z_1, z_2, z_3 et z_4.

Proposition. Soit $I : \mathbb{C} - \{\Omega\} \to \mathbb{C} \setminus \{\Omega\}$ l'inversion de pôle Ω et de rapport $k > 0$. Soient z_1, z_2, z_3, z_4 quatre points distincts de $\mathbb{C} \setminus \{\Omega\}$. Posons $z_i' = I(z_i)$ pour $i = 1, 2, 3, 4$. Alors

$$\left| [z_1', z_2' ; z_3', z_4'] \right| = \left| [z_1, z_2 ; z_3, z_4] \right| .$$

Preuve. On peut supposer $\Omega = 0$. On a

$$|z_1' - z_3'| = \frac{k\, |z_1 - z_3|}{|z_1|\,|z_3|} \quad \text{et} \quad |z_4' - z_2'| = \frac{k\, |z_4 - z_2|}{|z_4|\,|z_2|}$$

par Proposition du cours. Donc

$$|z_1' - z_3'|\,|z_4' - z_2'| = \frac{k^2 |z_1 - z_3|\,|z_4 - z_2|}{|z_1|\,|z_2|\,|z_3|\,|z_4|} .$$

De même

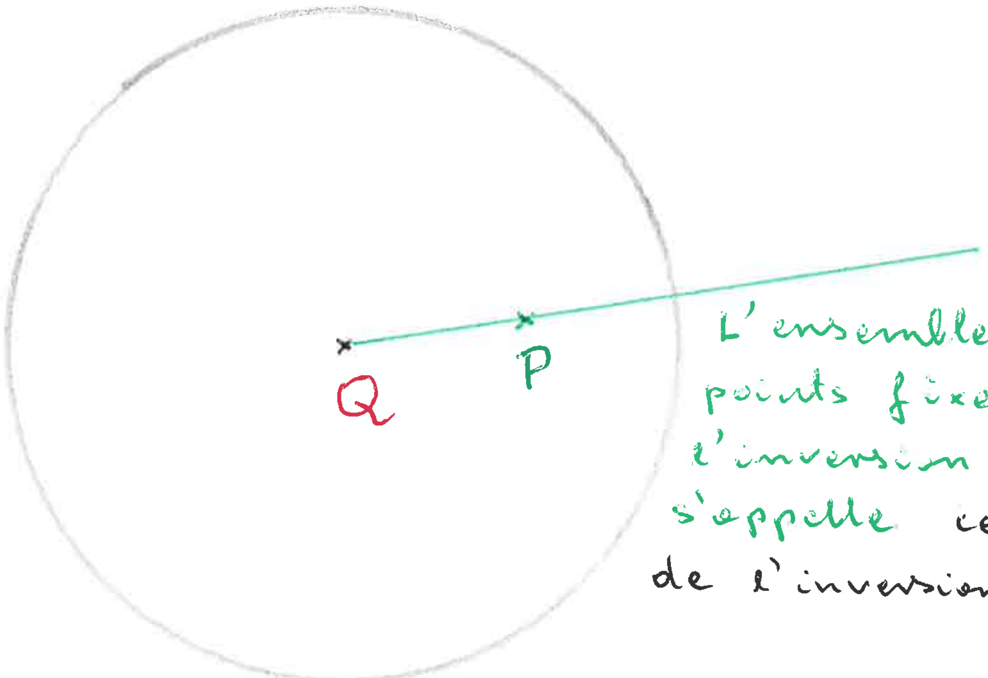
$$|z_1' - z_2'|\,|z_4' - z_3'| = \frac{k^2\, |z_1 - z_2|\,|z_4 - z_3|}{|z_1|\,|z_2|\,|z_3|\,|z_4|} .$$

D'où en divisant, la formule de la proposition. ∎

Proposition. Soit $I : \Pi \setminus \{Q\} \to \Pi \setminus \{Q\}$ l'inversion de centre Q et de puissance k. Alors

i) $I^2 = Id_{\Pi \setminus \{Q\}}$;

ii) l'ensemble de points fixes de I est un cercle de centre Q et de rayon $\sqrt{k}$,



L'ensemble de points fixes de l'inversion I s'appelle cercle de l'inversion I.

Théorème (Propriétès d'inversion)

Soit Π un plan affine euclidien. Soit $I : \Pi \setminus \{Q\} \to \Pi \setminus \{Q\}$ l'inversion de centre Q et de puissance k.

L'image par I

i) d'une droite d passant par Q est la même droite d,

ii) d'une droite d telle que $Q \notin d$ est un cercle S passant par Q,

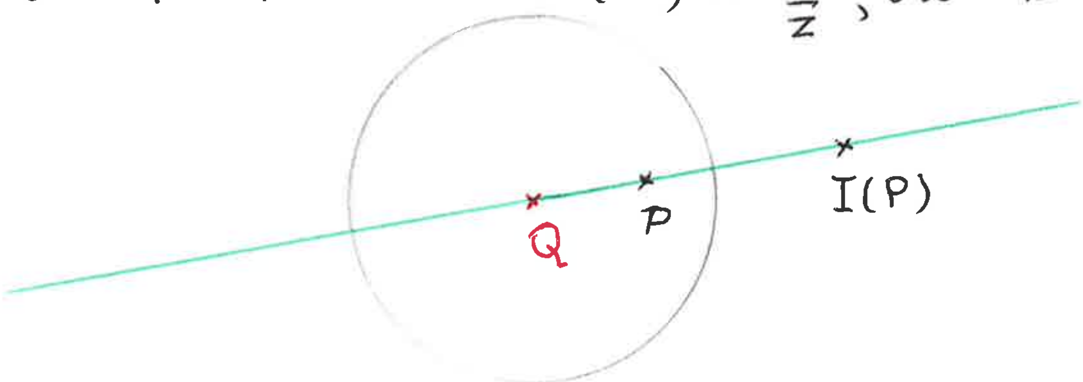
iii) d'un cercle S passant par Q est une droite d telle que $Q \notin d$,

De plus, dans ii) et iii) la droite passant par Q et le centre de S est perpendiculaire à d.

iv) d'un cercle S tel que $Q \notin S$ est un cercle S' tel que $Q \notin S'$.

De plus Q et les centres de S et S' sont alignés.

Preuve. On peut supposer que $\Pi = \mathbb{C}$ et $Q = 0$. Alors $I(z) = \dfrac{R^2}{\bar{z}}$, où $k = R^2$, $R > 0$.



i) est donc evident.

ii) Soit d une droite dans $\mathbb{C}$ t.q. $0 \notin d$. Alors l' équation de la droite d est

$$\alpha z + \overline{\alpha}\,\overline{z} + c = 0$$

où $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{R}$ et $c \neq 0$ car $0 \notin d$.

De plus le vecteur $\overline{\alpha} \perp \vec{d}$.

L' équation

$$\alpha z + \overline{\alpha}\,\overline{z} + c = 0$$

on multiplie par $\dfrac{R^2 \cdot R^2}{c \cdot z \cdot \overline{z}}$. Donc on obtient

$$\alpha \frac{R^2}{c \cdot \overline{z}} \frac{R^2}{\cancel{z}} \cancel{z} + \overline{\alpha} \frac{R^2}{c \cdot z} \frac{R^2}{\cancel{\overline{z}}} \cancel{\overline{z}} + \cancel{c} \frac{R^2 R^2}{\cancel{c} \cdot z \cdot \overline{z}} = 0 .$$

Donc

$$\frac{\alpha \cdot R^2}{c} \cdot \frac{R^2}{\overline{z}} + \frac{\overline{\alpha} R^2}{c} \cdot \frac{R^2}{z} + \frac{R^2}{\overline{z}} \cdot \frac{R^2}{z} = 0 ,$$

On remplace $\dfrac{R^2}{\overline{z}}$ par $I(z)$. On obtient donc

$$I(z) \cdot \overline{I(z)} + \frac{\alpha R^2}{c} I(z) + \frac{\overline{\alpha} R^2}{c} \overline{I(z)} = 0 .$$

Donc $I(z)$ appartient au cercle S

de l'équation

$$u\bar{u} + \frac{R^2}{c}\alpha u + \frac{R^2}{c}\bar{\alpha}\bar{u} = 0,$$

du centre $-\frac{R^2}{c}\bar{\alpha}$ et passant per O.

Le vecteur $\overrightarrow{O, -\frac{R^2}{c}\bar{\alpha}} = -\frac{R^2}{c}\bar{\alpha}$ est $\perp \vec{d}$ car $\bar{\alpha} \perp \vec{d}$, Donc la droite passant per O et le centre de S est $\perp$ d.

iii) le preuve est le même.

iv) Soit S un cercle ne passant pas per O. Alors l'équation de S est

$$(*) \quad z\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + \varepsilon = 0,$$

où $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ $(-\varepsilon + \alpha\bar{\alpha} > 0)$ et $\varepsilon \neq 0$ car $0 \notin S$. Le centre de S est le point $-\bar{\alpha}$.

L'équation $(*)$ on multiplie par $\frac{R^2 \cdot R^2}{\varepsilon \cdot z \cdot \bar{z}}$ et on obtient

$$\frac{R^4}{\varepsilon} + \frac{R^2}{\varepsilon}\alpha\, I(z) + \frac{R^2}{\varepsilon}\bar{\alpha}\,\overline{I(z)} + I(z)\overline{I(z)} = 0.$$

L'équation $u\bar{u} + \frac{R^2}{\varepsilon}\alpha u + \frac{R^2}{\varepsilon}\bar{\alpha}\bar{u} + \frac{R^4}{\varepsilon} = 0$

est une équation d'un cercle S' du centre $-\frac{R^2}{\varepsilon}\bar{\alpha}$ et tel que $0 \notin S'$ car $\frac{R^4}{\varepsilon} \neq 0$.

Les points 0, $-\bar{\alpha}$ (centre de S) et $-\frac{R^2}{\varepsilon}\bar{\alpha}$ (centre de S') sont alignés car $-\frac{R^2}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$.

Théorème (anticonformité d'inversion). Soit Π un plan affine euclidien. Soit $I : \Pi \setminus \{Q\} \to \Pi \setminus \{Q\}$ l'inversion de centre Q et de puissance k. Soient $\gamma :]-1,1[\to \Pi$ et $\varphi :]-1,1[\to \Pi$ deux courbes paramétrées régulières de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $\gamma(0) = \varphi(0) \neq Q$. Alors

$$\measuredangle_{\gamma'(0),\varphi'(0)} = -\measuredangle_{(I\circ\gamma)'(0),(I\circ\varphi)(0)} .$$

Preuve. On peut supposer que $I : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $I(z) = \frac{k}{\bar{z}}$. Alors $I = h_k^0 \circ f \circ c$, où $c(z) = \bar{z}$, $f(z) = 1/z$ et

$h_k^0(z) = kz$. Les applications h_k^0 et c sont $\mathbb{R}$-linéaires. h_k^0 preserve des angles. c est une symétrie orthogonale par rapport à la droite $z - \bar{z} = 0$, donc $\measuredangle_{v,w} = - \measuredangle_{c(v), c(w)}$ (exercice).

La différentielle $d_z f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une multiplication par le nombre complexe $f'(z) = -\frac{1}{z^2} = r e^{i\alpha}$ ($r = |f'(z)|$, $\alpha = \arg f'(z)$). Donc $d_z f$ aussi preserve des angles. ∎

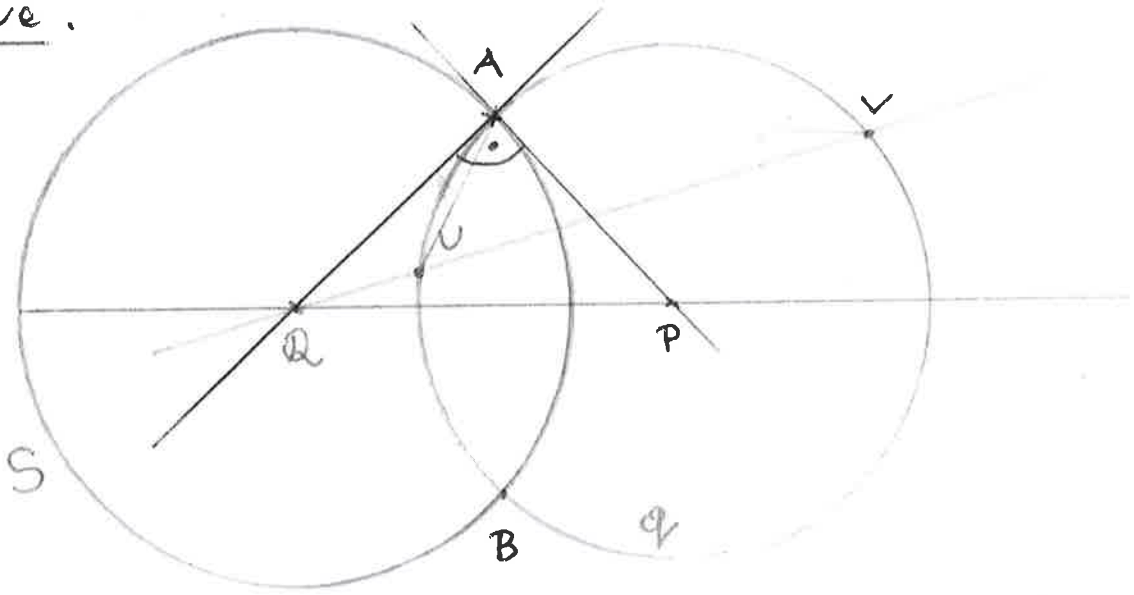
Théorème Soit Π un plan affine euclidien. Soit I une inversion du plan Π. Soit S le cercle de l'inversion. un cercle q est orthogonal à S si et seulement si $I(q) = q$.

$d_{z_0} f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une multiplication par de nombre complex $f'(z_0) = -\frac{1}{z_0^2} = |f'(z_0)| \cdot e^{i\alpha}$.
(feuille C (TD:1)).
Donc $d_{z_0} f$ aussi preserve des angles. ■

<u>Définition</u>. Deux cercles sont dit orthogonaux s'ils se coupent en deux points et si en chaque point commun, les tangentes sont orthogonales.

<u>Théorème</u>. Soit I une inversion du plan euclidien Π de puissance $k>0$ et soit S le cercle de l'inversion. Un cercle q est orthogonal à S ssi $I(q)=q$.

<u>Preuve</u>.



Soit I une inversion de centre (pôle) Q et de puissance $k=R^2$. Alors S le cercle de centre Q et rayon R.

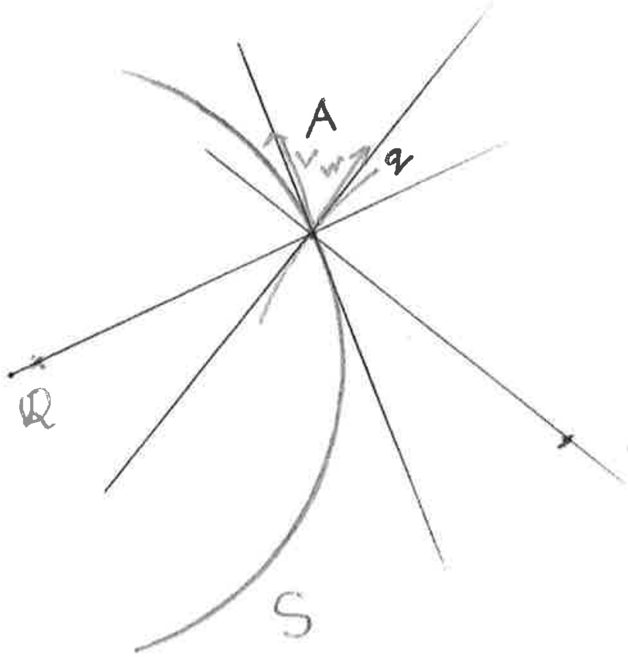
$\Rightarrow$ Soit q un cercle de centre P et rayon r orthogonale à S. Alors $\vec{QA} \perp \vec{PA}$ car les tangentes en A aux cercles S et q sont $\perp$.

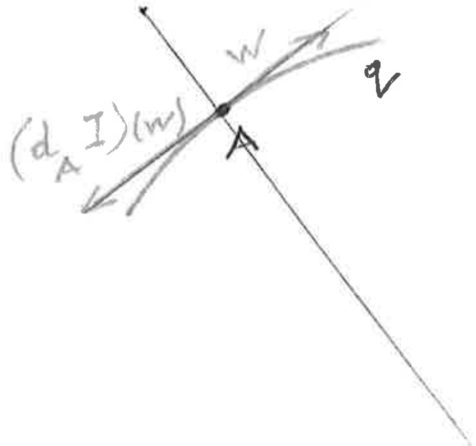
$I(q)$ ne peut pas être une droite (montrez)
si c'est droite elle est $\perp$ S et passe par les points $S \cap q$ donc aussi par centre $\Rightarrow$ I(cette droite) = droite pas cercle.

donc $I(q)$ un cercle de centre $P_1 \in (Q,P)$ (par Th. Propriétés d'inversion, iv) qui passe par A et $I(q) \perp S$ (par Th. Anticonformité d'inversion).

Donc $\vec{QA} \perp \vec{P_1A}$, d'où $P = P_1$. Donc $I(q)$ est de centre P et rayon $d(P,A) = r$, donc $I(q) = q$.

$\Leftarrow$





Soit q un cercle tel que $I(q) = q$.
Alors $q \cap S = \{A, B\}$.
Soit $\alpha = \widehat{S,q} = \widehat{v,w}$. I est l'identité sur S donc $(d_A I)v = v$.

On a $(d_A I)(w) = -tw$ pour certain $t>0$.

Donc $\beta = \measuredangle_{I(S), I(q)} = \measuredangle_{v_1 - w}$.

On a $-\beta + \alpha = \varpi$.

On a aussi: $\beta = -\alpha$ par Th d'anticonformité d'inversion.

Donc $2\alpha = \varpi$, donc α est un angle droit, donc S et q sont orthogonaux. ∎

Preuve (On utilise Prop 32 de Euclide)

$\Rightarrow$ On suppose que S et q sont orthogonaux.

soit $U \in q$ un point quelconque et

soit $V \in (Q, U) \cap q$ (deuxième point d'intersection).

Corollaire du Prop. 32 de Euclide implique

$$\|\overrightarrow{QU}\| \, \|\overrightarrow{QV}\| = \|\overrightarrow{QA}\|^2 = R^2 = k.$$

Donc $I_{Q, R^2}(U) = V \in q$ donc

$$I_{Q,k}(q) = q.$$

$\Leftarrow$ Supposons que $I(q) = q$.

Alors $S \cap q = \{A, B\}$ deux points.

On a $I(q) = q$, $I((Q,A)) = (Q,A)$ et $I((Q,B)) = (Q,B)$. Donc

$$I(A) = A \quad \text{et} \quad I(B) = B.$$ évident

Soit $U \in q$ un point quelconque. et soit $U \neq V \in q \cap (Q,U)$.

Donc $V = I(U)$ car $I(q) = q$ et $I((Q,U)) = (Q,U)$.

D'où $\|\overrightarrow{QU}\| \, \|\overrightarrow{QV}\| = \|\overrightarrow{QA}\|^2 = R^2 = R$.

Donc

$$\underline{\frac{\|\overrightarrow{QU}\|}{\|\overrightarrow{QA}\|} = \frac{\|\overrightarrow{QA}\|}{\|\overrightarrow{QV}\|}}$$

et ils ont un angle commun.

<u>Les triangles $\triangle QAU$ et $\triangle QVA$ sont donc semblables.</u>

Donc

$$\underline{\widehat{QVA} = \widehat{UAQ}}$$

Donc par Prop. 32 de livre III de Euclide (QA) tangente au cercle q donc $(QA) \perp (AP)$ donc les cercles S et q sont orthogonaux.

§ 3 GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

Soit

$$\mathbb{H} := \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0 \}$$

le démi-plan supérieur de $\mathbb{C}$

Définition. Les points hyperboliques de $\mathbb{H}$ sont de points de $\mathbb{H}$.

Définition. Les droites hyperboliques de $\mathbb{H}$ sont de sous-ensembles suivants de $\mathbb{H}$:

$l_{a,\infty} := \mathbb{H} \cap \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = a \}$ pour tous $a \in \mathbb{R}$,

$l(a,r) = l_{a-r,a+r} = \mathbb{H} \cap \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = r \}$

pour toute paire $(a,r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{>0}$.

Remarque. Le cercle $\{ z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = r \}$ avec $a \in \mathbb{R}$ est perpendiculaire à l'axe réel $\mathbb{R}$.

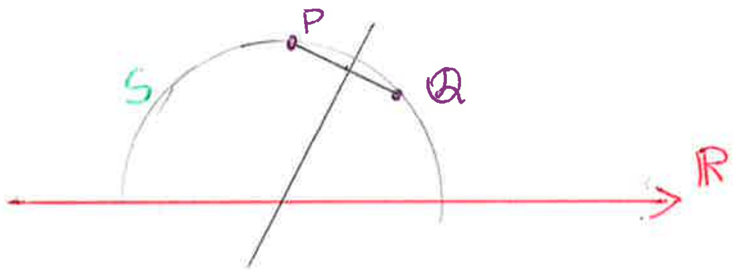
De même la droite $\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = a \} \perp \mathbb{R}$.

Proposition 1. (Postulat 1 et unicité) Par deux points de $\mathbb{H}$ passe une et une seule droite hyperbolique.

Preuve. Soient $P, Q \in H$ et $P \neq Q$. On a deux cas.

i) $\operatorname{Re} P = \operatorname{Re} Q$. Alors la droite hyperbolique $l_{\alpha,\infty}$ où $\alpha = \operatorname{Re} P$, passe par P et Q.

ii) $\operatorname{Re} P \neq \operatorname{Re} Q$



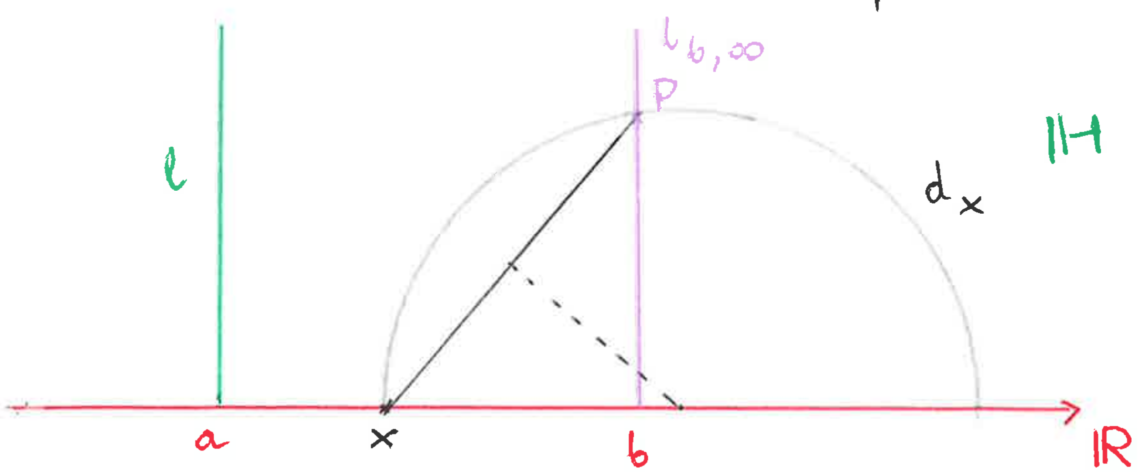
Soit $[P, Q]$ le segment euclidien et soit $L_{P,Q}$ la droite euclidien $\perp$ à $[P,Q]$ au point $\frac{1}{2}(P+Q)$. Alors $L_{P,Q}$ coupe l'axe réel $\mathbb{R}$ en un point euclidien $a \in \mathbb{R}$. Le cercle euclidien S de centre a et rayon $r = |P-a| = |Q-a|$ est $\perp$ à l'axe $\mathbb{R}$ et passe par P et Q, donc la droite hyperbolique $l(a,r)$ passe par P et Q.

L'unicité est dû au fait que des droites et cercles euclidiens avec ces propriétés sont uniques.

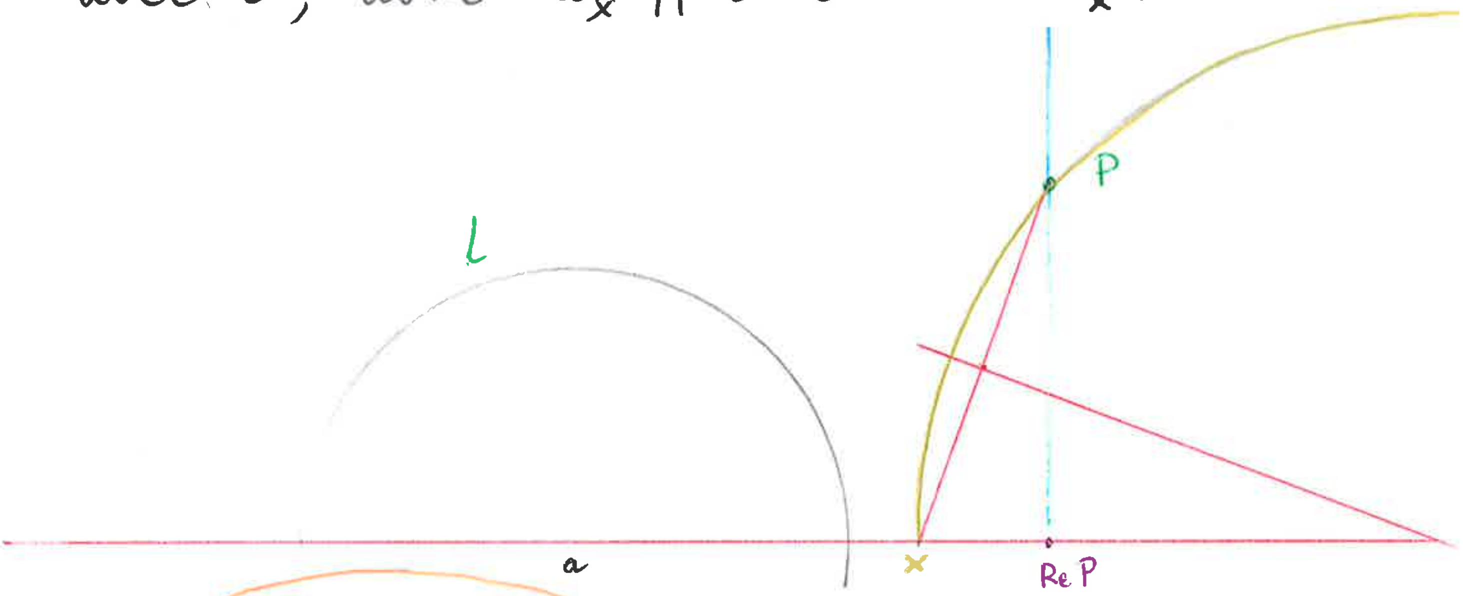
Définition. Deux droites hyperboliques de $\mathbb{H}$ sont dit parallèles si elles sont disjointes.

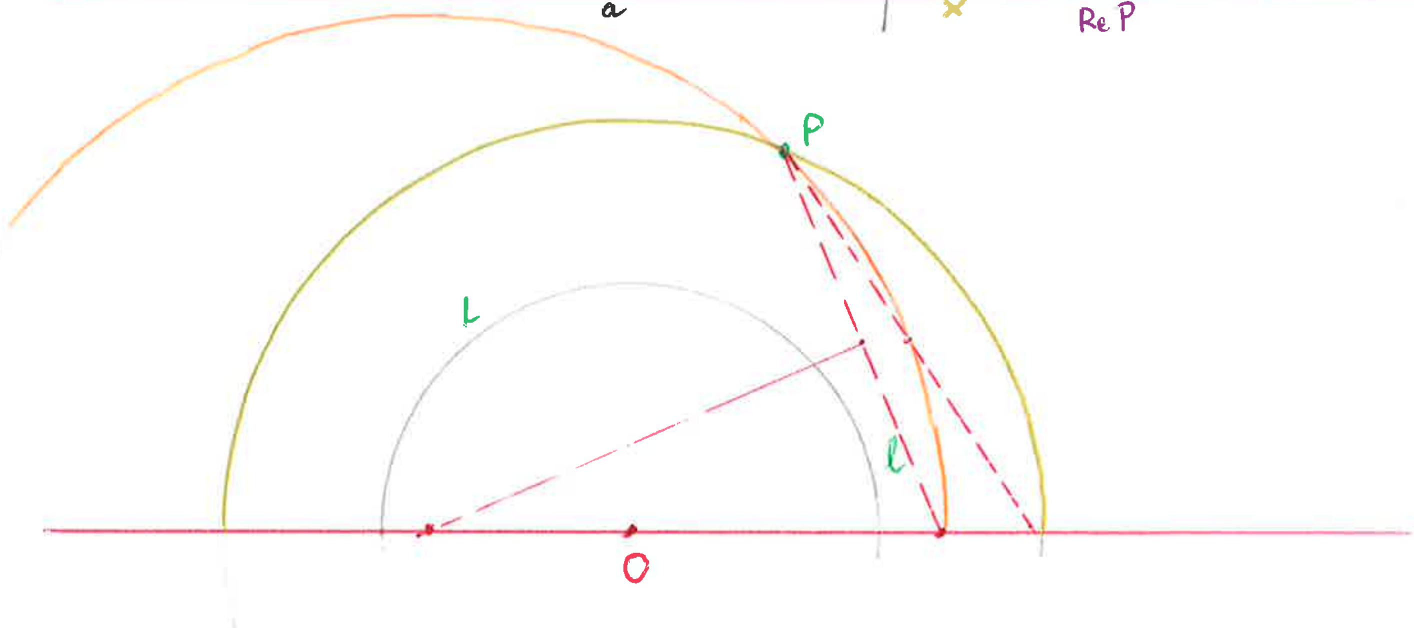
Proposition 2 (Postulat 5 hyperbolique)
Soit l une droite hyperbolique de $\mathbb{H}$ et soit $P \in \mathbb{H}$ un point de $\mathbb{H}$ tel que $P \notin l$. Alors il existe une infinité des droites hyperboliques distinctes, passant par P et parallèles à l.

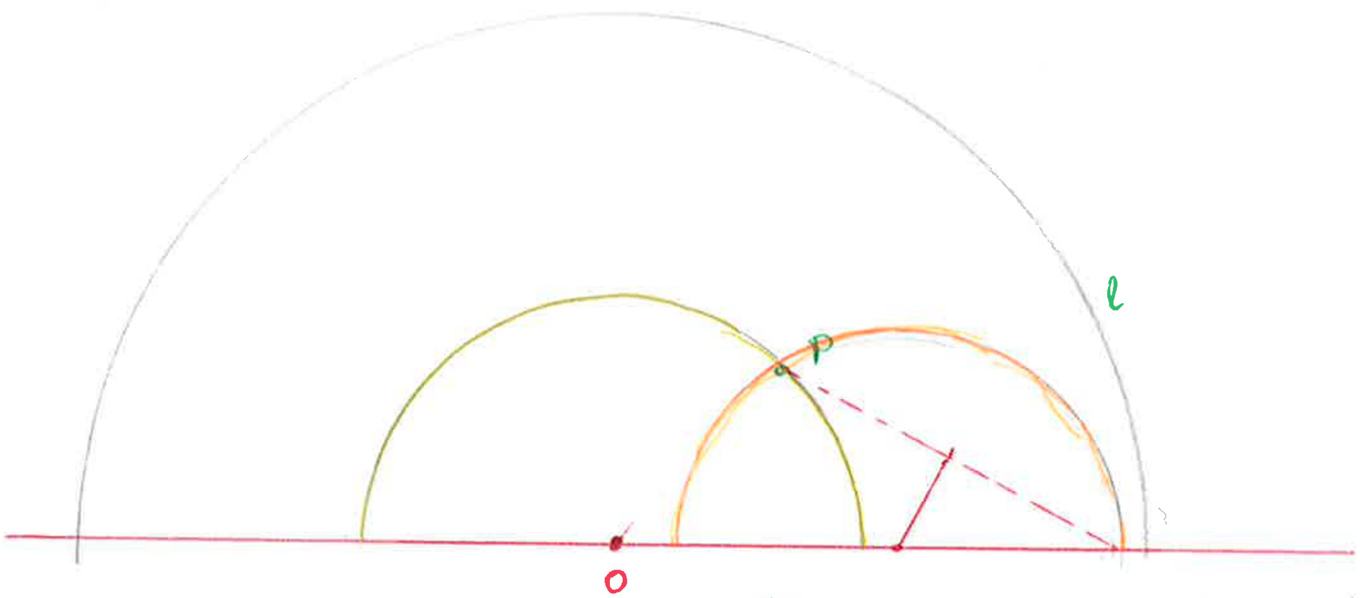
Preuve. Soit $l = l_{a,\infty}$ et soit $P \notin l_{a,\infty}$. Alors $b = \operatorname{Re} P \neq a$. La droite hyp. $l_{b,\infty}$ est disjointe avec l, donc $l_{b,\infty} \parallel l$ et $P \in l_{b,\infty}$.



Soit $x \in \mathbb{R}$, $a < x < b$. Alors la droite hyp. d_x est aussi disjointe avec ℓ, donc $d_x \parallel \ell$ et $P \in d_x$.







On pose $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et

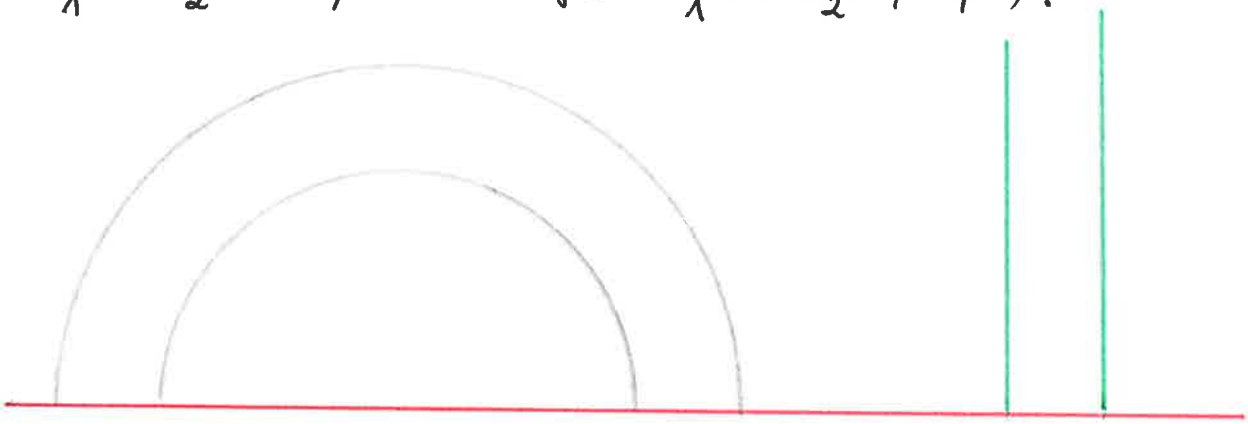
$\overline{\mathbb{H}} := \mathbb{H} \cup \overline{\mathbb{R}} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \Im m\, z \geqslant 0 \} \cup \{\infty\}$.

On pose

$$\overline{l}_{a,\infty} := l_{a,\infty} \cup \{a, \infty\},$$

$$\overline{l}(a,r) := l(a,r) \cup \{a-r, a+r\} = \overline{\mathbb{H}} \cap \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = r \}.$$

Définition. On dit que des droites hyp. parallèles l_1 et l_2 sont ultraparallèles (resp. parallèles asymptotiques) si $\overline{l}_1 \cap \overline{l}_2 = \emptyset$ (resp. $\overline{l}_1 \cap \overline{l}_2 \neq \emptyset$).

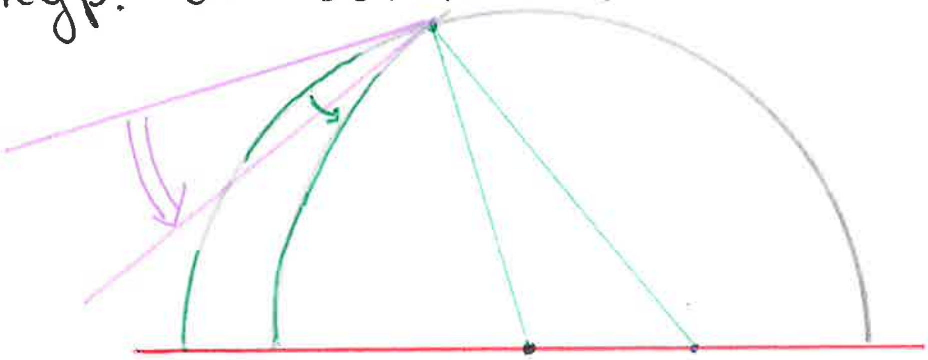


Angle hyperbolique

Définition. On appelle un angle hyperbolique une paire ordonnée de deux démi-droites hyp. de même sommet.

On rappelle que $\mathbb{C}$ a l'orientation canonique, la classe de la base $1, i$.

Définition. La mesure d'un angle hyp. est sa mesure euclidienne, c'est-à-dire la mesure euclidienne de l'angle entre les démi-droites euclidiennes tangentes aux démi-droites hyp. en sommet.

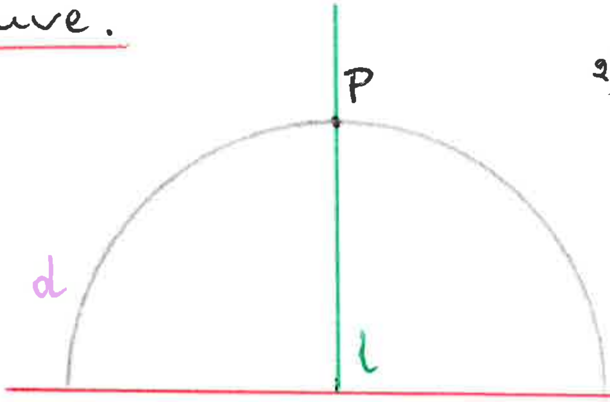


Droites hyperboliques perpendiculaires.

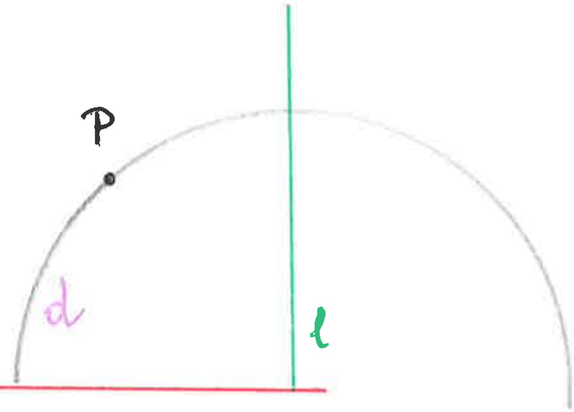
Proposition 3. Soit ℓ une droite hyp. de $\mathbb{H}$ et soit $P \in \mathbb{H}$ un point. Alors il existe une unique droite hyp. d passant par P et perpendiculaire à ℓ.

Preuve.

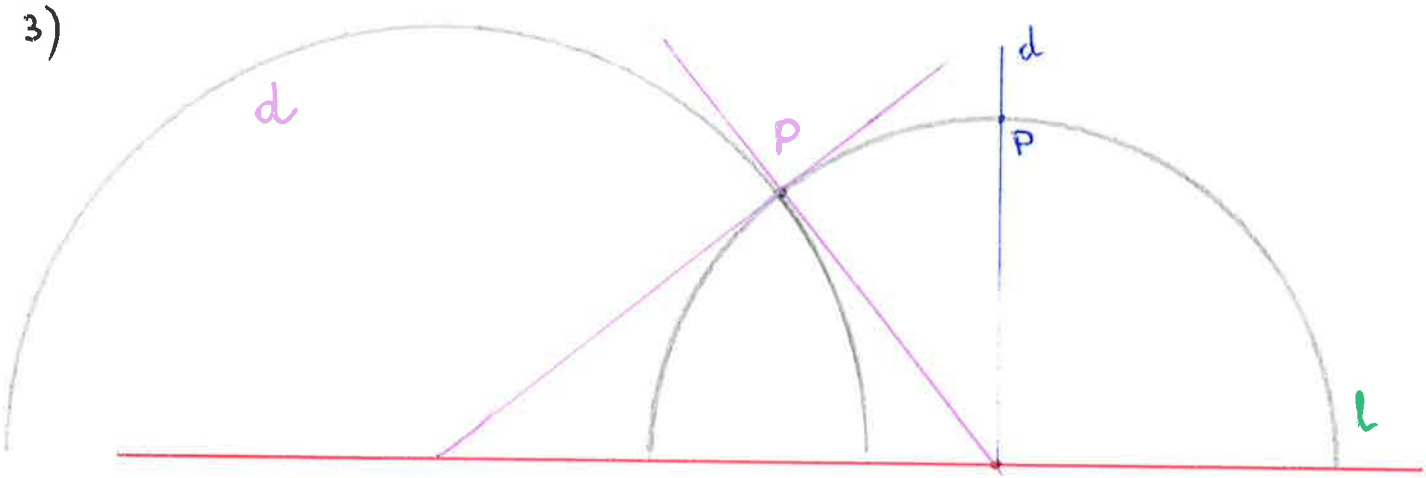
1)



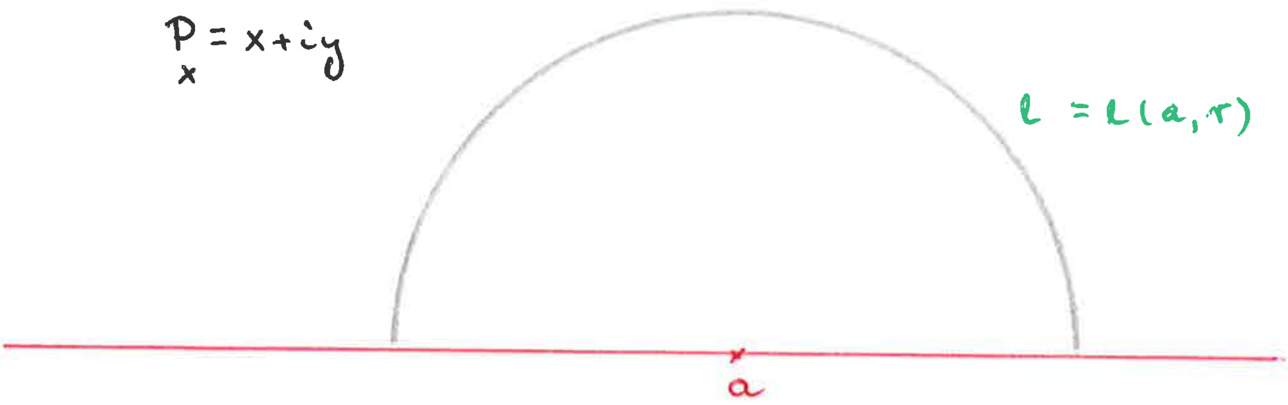
2)



3)



4)



On cherche $l(b,R)$ passant par P et orthogonal à $l(a,r)$.

Donc on cherche $b \in \mathbb{R}$, tel que

$$|x+iy-b|^2 + r^2 = |a-b|^2.$$

$$(x-b)^2 + y^2 + r^2 = (a-b)^2$$

$$x^2 - 2xb + \cancel{b^2} + y^2 + r^2 = a^2 - 2ab + \cancel{b^2}$$

$$2(a-x)b = a^2 - x^2 - y^2 - r^2.$$

Si $x \neq a$, alors on trouve un unique b. Alors

$$l(b,R) \perp l(a,r) \text{ et } P \in l(b,R),$$

où $b = \dfrac{a^2 - x^2 - y^2 - r^2}{2(a-x)}$, $R = |x+iy-b|$.

Si $x = a$, alors $l_{a,\infty} \perp l(a,r)$ et $P \in l_{a,\infty}$. ∎