Théorèmes classiques de géométrie

Soit Π un plan affine.

1. Théorème de Thalès. Soient d, d_1 et d_2 trois droites parallèles distinctes, D_1 et D_2 deux droites dont aucune n'est parallèle à d. Soient, pour $i = 1, 2$, $A_i = D_i \cap d$, $B_i = D_i \cap d_1$, $C_i = D_i \cap d_2$. Alors on a

$$\frac{\overrightarrow{A_1C_1}}{\overrightarrow{A_1B_1}} = \frac{\overrightarrow{A_2C_2}}{\overrightarrow{A_2B_2}}.$$

2. La réciproque du théorème de Thales. Soient d, d_1 deux droites parallèles distinctes, D_1 et D_2 deux droites dont aucune n'est parallèle à d. Soient pour $i = 1, 2$, $A_i = D_i \cap d$, $B_i = D_i \cap d_1$. Soient $C_1 \in D_1$ et $C_2 \in D_2$. Soient M_1 le milieu de A_1 et A_2, M_2 le milieu de B_1 et B_2, M_2 le milieu de C_1 et C_2. On suppose que

$$\frac{\overrightarrow{A_1C_1}}{\overrightarrow{A_1B_1}} = \frac{\overrightarrow{A_2C_2}}{\overrightarrow{A_2B_2}}.$$

Alors

i) la droite (C_1, C_2) est parallèle à d ;

ii) les points M_1, M_2 et M_3 sont alignés.

3. Soient D_1 et D_2 deux droites sécantes en O, d et d_1 deux droites parallèles coupant D_i en A_i et B_i respectivement. On suppose que d et d_1 ne passent pas par O. Alors

$$\frac{\overrightarrow{OA_1}}{\overrightarrow{OB_1}} = \frac{\overrightarrow{OA_2}}{\overrightarrow{OB_2}} = \frac{\overrightarrow{A_1A_2}}{\overrightarrow{B_1B_2}} .$$

4. Théorème de Pappus. Soient A, B, C trois points d'une droite d et A_1, B_1, C_1 trois points d'une droite d_1 distincte de d. Si $(AB_1) \parallel (BA_1)$ et $(BC_1) \parallel (CB_1)$ alors $(AC_1) \parallel (CA_1)$.

5. Théorème de Desargues. Soient ΔABC et $\Delta A_1B_1C_1$ deux triangles sans sommet commun et à côtés respectivement parallèles. Alors les droites (AA_1), (BB_1) et (CC_1) sont concourantes ou parallèles.

6. Théorème de Ménélaüs. Soit ΔABC un triangle. Soient $P \in (BC)$, $Q \in (CA)$ et $R \in (AB)$*. Les points P, Q et R sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{QC}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{RA}}{\overrightarrow{RB}} = 1 .$$

* t.q. $P \neq C$, $Q \neq A$ et $R \neq B$.

4. <u>Théorème de Ceva.</u> On suppose le même que dans l'exercice 3. Alors les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourants ou parallèles si et seulement si

$$\frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{QC}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{RA}}{\overrightarrow{RB}} = -1 .$$

5. <u>Théorème de Varignon.</u> Dans un quadrilatère quelconque, les milieux des côtes forment les sommets d'un parallélogramme.

6. <u>Théorème de Pappus.</u> Soit $\mathcal{E}$ un plan affine. Soient $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{E}$ trois points alignés et $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathcal{E}$ trois autres points alignés. On suppose que les points d'intersection existent

$\{S_1\} = (P_2 Q_3) \cap (P_3 Q_2)$, $\{S_2\} = (P_3 Q_1) \cap (P_1 Q_3)$ et

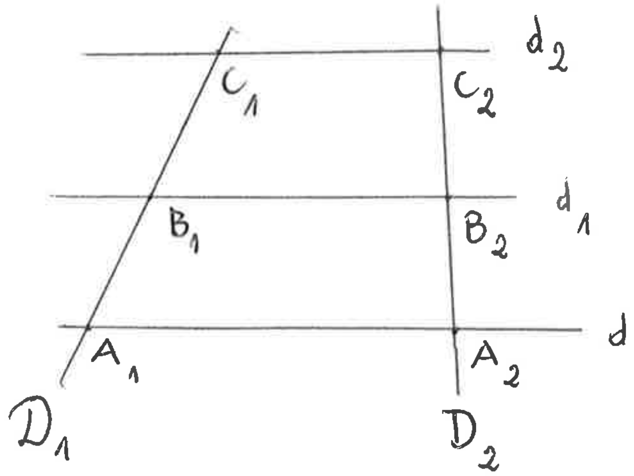
$S_3 = (P_1 Q_2) \cap (P_2 Q_1)$. (On suppose aussi que les points $\{A\} = (P_3 Q_1) \cap (P_2 Q_3)$, $\{B\} = (P_1 Q_2) \cap (P_3 Q_1)$ et $\{C\} = (P_1 Q_2) \cap (P_2 Q_3)$ existent et sont affinement libres). Alors les points S_1, S_2 et S_3

sont alignés.

7. Théorème de Desargues. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles dans un plan affine. On suppose que les points $\{\alpha\} := (BC) \cap (B'C')$, $\{\beta\} := (CA) \cap (C'A')$ et $\{\gamma\} := (AB) \cap (A'B')$ existent. Alors α, β et γ sont colinéaires si et seulement si les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles.

8. Théorème que les trois médianes d'un triangle se coupent en exactement un point.
(Les médianes d'un triangle sont concourantes.)

Solutions (Théorèmes classiques de géométrie)

1. 

Soit $\rho : \Pi \to \Pi$ la projection affine sur D_2 parallèle à d. Alors $\rho(A_1) = A_2$, $\rho(B_1) = B_2$, $\rho(C_1) = C_2$.

On a $\overrightarrow{A_1C_1} = \lambda \overrightarrow{A_1B_1}$ donc $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{A_1C_1}}{\overrightarrow{A_1B_1}}$.

Donc $\rho(\overrightarrow{A_1C_1}) = \lambda \vec{\rho}(\overrightarrow{A_1B_1})$, d'où

$$\overrightarrow{\rho(A_1),\rho(C_1)} = \lambda\, \overrightarrow{\rho(A_1)\rho(B_1)}, \text{ donc}$$

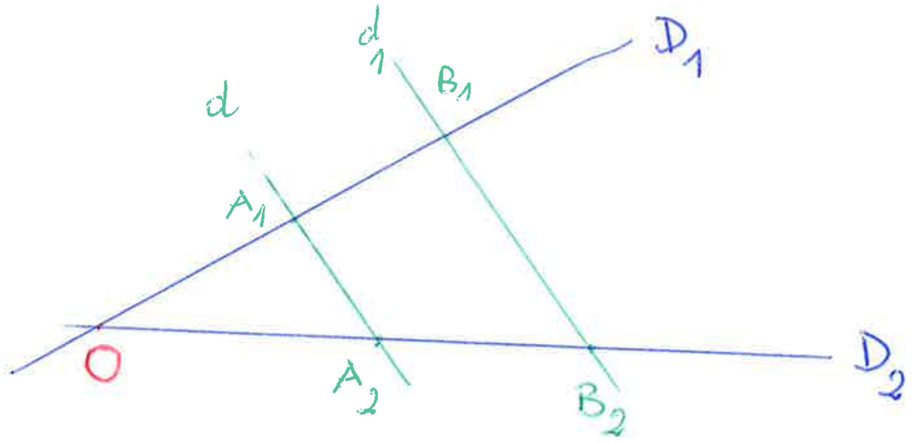
$$\overrightarrow{A_2C_2} = \lambda \overrightarrow{A_2B_2}, \text{ donc } \lambda = \frac{\overrightarrow{A_2C_2}}{\overrightarrow{A_2B_2}}.$$

2. Soit n la droite passant par C_2 et parallèle à d. Soit $X = n \cap D_1$. Alors du Th. de Thalès on a $\dfrac{\overrightarrow{A_1X}}{\overrightarrow{A_1B_1}} = \dfrac{\overrightarrow{A_2C_2}}{\overrightarrow{A_2B_2}}$. Donc $\dfrac{\overrightarrow{A_1X}}{\overrightarrow{A_1B_1}} = \dfrac{\overrightarrow{A_1C_1}}{\overrightarrow{A_1B_1}}$, d'où

$\overrightarrow{A_1X} = \overrightarrow{A_1C_1}$. Donc $X = A_1 \dotplus \overrightarrow{A_1X} = A_1 \dotplus \overrightarrow{A_1C_1} = C_1$.

Donc la droite $(C_1, C_2) = n$ est parallèle à d.

3.



Soit n la droite passant par O et $\parallel$ à d.

Th. de Thalès implique

$$\frac{\overrightarrow{OA_1}}{\overrightarrow{OB_1}} = \frac{\overrightarrow{OA_2}}{\overrightarrow{OB_2}} .$$

Soit h l'homothétie de Π de centre O et de rapport $\lambda := \frac{\overrightarrow{OA_1}}{\overrightarrow{OB_1}}$. Alors

$h(X) = O \dot{+} \lambda \overrightarrow{OX}$. Donc $h(B_1) = O \dot{+} \lambda \overrightarrow{OB_1} =$

$= O \dot{+} \overrightarrow{OA_1} = A_1$ et $h(B_2) = O \dot{+} \lambda \overrightarrow{OB_2} =$

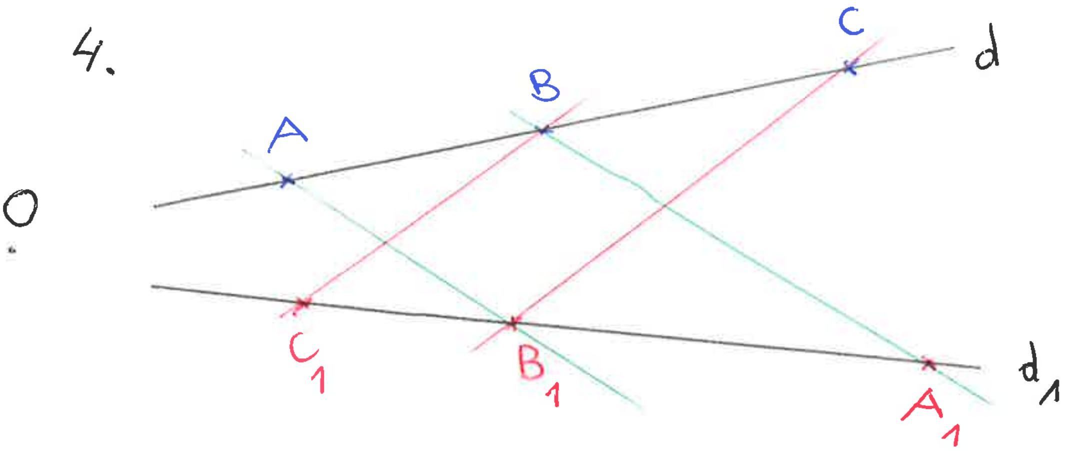
$= O \dot{+} \overrightarrow{OA_2} = A_2$. Donc $h(B_1) = A_1$ et $h(B_2) = A_2$.

Donc $\underset{\underset{\lambda \overrightarrow{B_1B_2}}{\parallel}}{\vec{h}(\overrightarrow{B_1B_2})} = \overrightarrow{h(B_1)h(B_2)} = \overrightarrow{A_1A_2}$,

d'où $$\frac{\overrightarrow{A_1A_2}}{\overrightarrow{B_1B_2}} = \lambda = \frac{\overrightarrow{OA_1}}{\overrightarrow{OB_1}} .$$

$\blacksquare$

4.



Supposons que d et d_1 se coupent en O.

Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\lambda = \frac{\vec{OB}}{\vec{OA}}$. Alors $h(A) = B$.

Soit g l'homothétie de centre O et de rapport $\mu = \frac{\vec{OC}}{\vec{OB}}$. Alors $g(X) = O + \mu \vec{OX}$, donc $g(B) = C$.

Th. de Thalès implique que

$$\frac{\vec{OB}}{\vec{OA}} = \frac{\vec{OA_1}}{\vec{OB_1}} \quad \text{et} \quad \frac{\vec{OC}}{\vec{OB}} = \frac{\vec{OB_1}}{\vec{OC_1}}.$$

Donc $h(B_1) = A_1$ et $g(C_1) = B_1$. On a $(g \circ h)(A) = g(B) = C$ et $(h \circ g)(C_1) = h(B_1) = A_1$.

Mais $g \circ h = h \circ g$ est une homothétie de centre O et rapport $\lambda\mu$. Soit $k = g \circ h$.

On a $k(A) = C$ et $k(C_1) = A_1$.

$\vec{OC} = \overrightarrow{k(O)k(A)} = \vec{k}(\vec{OA}) = \lambda\mu \, \vec{OA}$. Donc $\frac{\vec{OC}}{\vec{OA}} = \lambda\mu$

De même

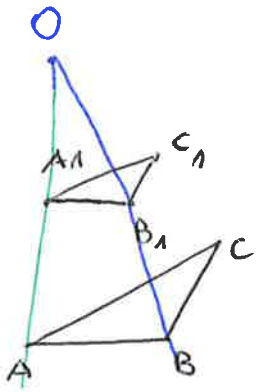
$$\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{k(O)k(C_1)} = \vec{k}(\overrightarrow{OC_1}) = \lambda\mu\overrightarrow{OC_1}. \text{ Donc } \frac{\overrightarrow{OA_1}}{\overrightarrow{OC_1}} = \lambda\mu,$$

d'où $$\frac{\overrightarrow{OC}}{\overrightarrow{OA}} = \frac{\overrightarrow{OA_1}}{\overrightarrow{OC_1}}.$$

La réciproque du Th. de Thalès implique donc $(CA_1) \parallel (AC_1)$.

$$\left(\begin{array}{l} \vec{k}(\overrightarrow{AC_1}) = \lambda\mu\overrightarrow{AC_1} \\ \quad \shortparallel \\ \overrightarrow{k(A)k(C_1)} = \overrightarrow{CA_1} \qquad , \text{ donc } (AC_1) \parallel (CA_1) \end{array} \right).$$

5.



Supposons que (AA_1) et (B_1B_1) se coupent en O.

Alors $$\frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OA_1}} = \frac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OB_1}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{A_1B_1}} =: \lambda \quad \text{par Th. de Thalès}$$

et l'ex. 3. Soit $h : \Pi \to \Pi$ l'homothètie de centre O et de rapport λ. Alors $h(A_1) = A$ et $h(B_1) = B$. Soit $\Gamma = h(C_1)$.

Alors $\vec{h}(\overrightarrow{A_1C_1}) = \lambda\overrightarrow{A_1C_1}$ et aussi $\vec{h}(\overrightarrow{A_1C_1}) = \overrightarrow{h(A_1),h(C_1)} = \overrightarrow{A\Gamma}$ donc $(A\Gamma) \parallel (A_1C_1)$.

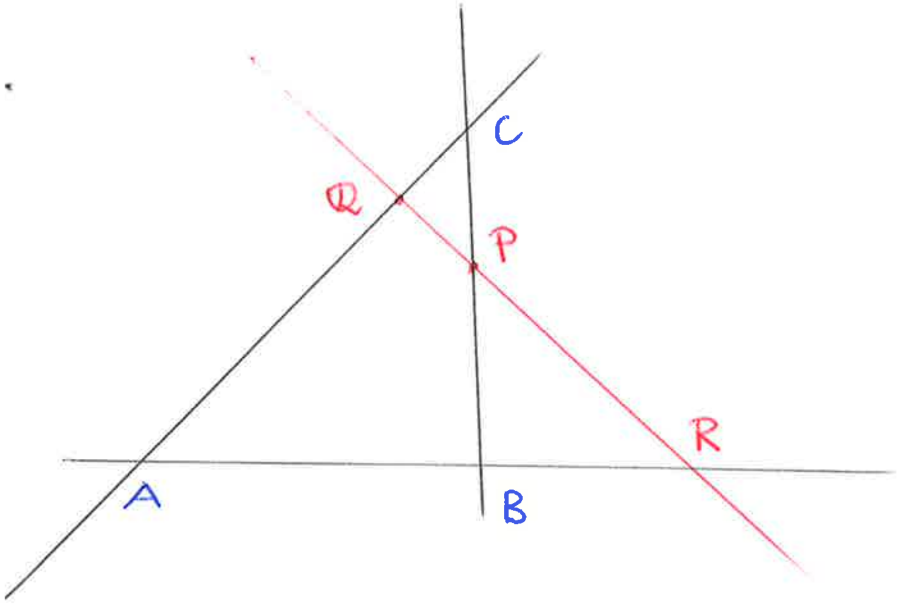
Mais $(AC) \parallel (A_1C_1)$. Donc $(A\Gamma) = (AC)$ par Postulat V.

De même $(B\Gamma) = (BC)$. Donc $\Gamma = C$ car deux droites se coupent seulement dans un point.

Donc $h(C_1) = C$, d'où $C = O \dotplus \lambda \overrightarrow{OC_1}$.

Donc $C \in (OC_1)$. Donc $(OC_1) = (CC_1)$. ∎

6.



On suppose que P, Q et R sont alignés.

Soit $\lambda_1 = \dfrac{\overrightarrow{RA}}{\overrightarrow{RB}}$. Alors $h^R_{\lambda_1}(B) = A$ car $h^R_{\lambda_1}(X) = R \dotplus \lambda_1 \overrightarrow{RX}$.

Soit $\lambda_2 = \dfrac{\overrightarrow{QC}}{\overrightarrow{QA}}$. Alors $h^Q_{\lambda_2}(A) = C$.

Soit $g = h^Q_{\lambda_2} \circ h^R_{\lambda_1}$. Alors $g(B) = C$

Si $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$ alors g est une homothétie de rapport $\lambda_1\lambda_2$ et du centre sur la droite (RQ), mais aussi sur la droite (BC), donc de centre P.

On a $\vec{g}(\overrightarrow{PB}) = \overrightarrow{PC} = \mu \overrightarrow{PB}$, donc

$$g = h_{\mu}^{P} \quad \text{où} \quad \mu = \lambda_1\lambda_2 = \frac{\overrightarrow{PC}}{\overrightarrow{PB}}.$$

Donc $$\lambda_1\lambda_2 \cdot \frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PC}} = 1.$$

Si $\lambda_1\lambda_2 = 1$ alors $g = \tau_{(1-\lambda_2)\overrightarrow{RQ}}$. Mais alors $g(B) = C$ est impossible.

On suppose que

$$\frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{QC}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{RA}}{\overrightarrow{RB}} = 1.$$

Soit $P_1 \in (BC) \cap (QR)$. Alors les points P_1, Q et R sont alignés donc

$$\frac{\overrightarrow{P_1B}}{\overrightarrow{P_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{QC}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{RA}}{\overrightarrow{RB}} = 1.$$ Donc

$$1 \neq \lambda := \frac{\overrightarrow{P_1B}}{\overrightarrow{P_1C}} = \frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PC}}.$$ On a $h_{\lambda}^{P_1}(C) = B$ et $h_{\lambda}^{P}(C) = B$.

$$(h_\lambda^{P_1})^{-1} \circ h_\lambda^{P} = h_{\lambda^{-1}}^{P_1} \circ h_\lambda^{P} = \tau_{(1-\lambda^{-1})\overrightarrow{PP_1}} .$$

$$\left((h_\lambda^{P_1})^{-1} \circ h_\lambda^{P} \right)(C) = (h_\lambda^{P_1})^{-1}\left(h_\lambda^{P}(C) \right) = (h_\lambda^{P_1})^{-1}(B) = C .$$

$$\tau_{(1-\lambda^{-1})\overrightarrow{PP_1}}(C) = C \implies (1-\lambda^{-1})\overrightarrow{PP_1} = 0$$

donc $P = P_1$. Donc les points P, Q et R sont alignés. ■