§3 GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

Soit

$$\mathbb{H} := \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0 \}$$

le démi-plan supérieur de $\mathbb{C}$

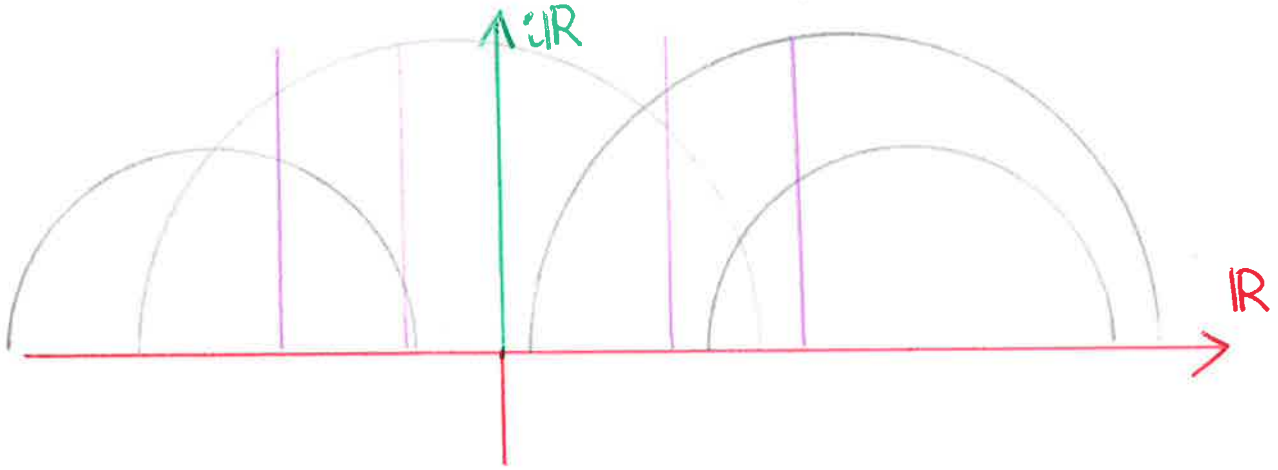
Définition. Les points hyperboliques de $\mathbb{H}$ sont de points de $\mathbb{H}$.

Définition. Les droites hyperboliques de $\mathbb{H}$ sont de sous-ensembles suivants de $\mathbb{H}$:

$l_{a,\infty} := \mathbb{H} \cap \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = a \}$ pour tous $a \in \mathbb{R}$,

$l(a,r) = l_{a-r,a+r} = \mathbb{H} \cap \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = r \}$

pour toute paire $(a,r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{>0}$.



Remarque. Le cercle $\{ z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = r \}$ avec $a \in \mathbb{R}$ est perpendiculaire à l'axe réel $\mathbb{R}$.

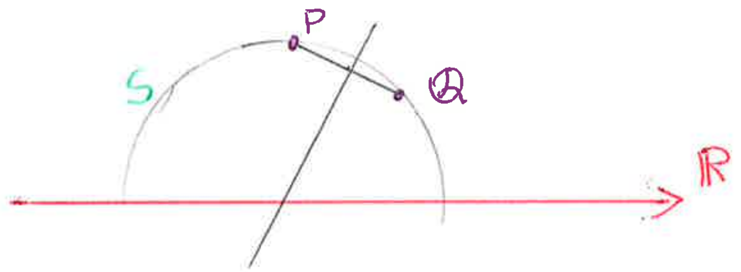
De même la droite $\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = a \} \perp \mathbb{R}$.

Proposition 1. (Postulat 1 et unicité) Par deux points de $\mathbb{H}$ passe une et une seule droite hyperbolique.

Preuve. Soient $P, Q \in H$ et $P \neq Q$. On a deux cas.

i) $\mathrm{Re}\, P = \mathrm{Re}\, Q$. Alors la droite hyperbolique $l_{\alpha,\infty}$ où $\alpha = \mathrm{Re}\, P$, passe par P et Q.

ii) $\mathrm{Re}\, P \neq \mathrm{Re}\, Q$



Soit $[P, Q]$ le segment euclidien et soit $L_{P,Q}$ la droite euclidien $\perp$ à $[P, Q]$ au point $\frac{1}{2}(P+Q)$. Alors $L_{P,Q}$ coupe l'axe réel $\mathbb{R}$ en un point euclidien $a \in \mathbb{R}$. Le cercle euclidien S de centre a et rayon $r = |P-a| = |Q-a|$ est $\perp$ à l'axe $\mathbb{R}$ et passe par P et Q, donc la droite hyperbolique $l(a, r)$ passe par P et Q.

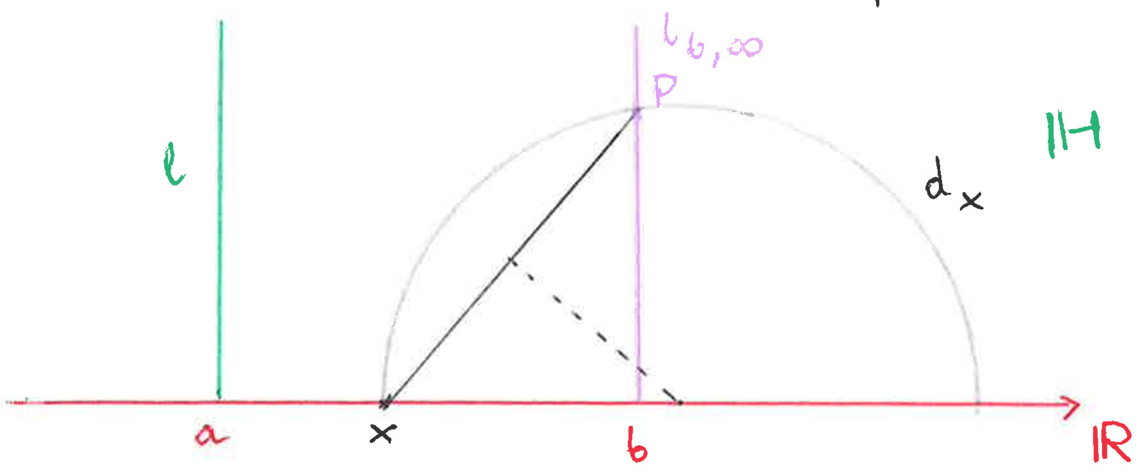
L'unicité est dû au fait que des droites et cercles euclidiens avec ces propriétés sont uniques. ■

Définition. Deux droites hyperboliques de $\mathbb{H}$ sont dit parallèles si elles sont disjointes.

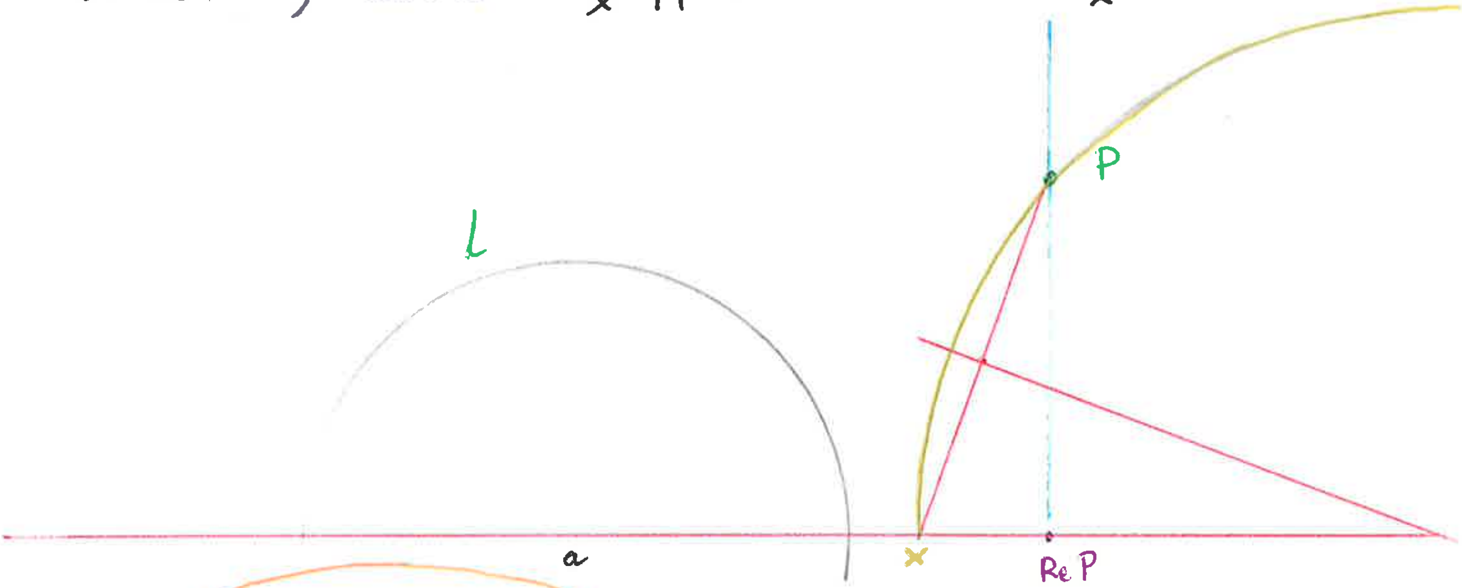
Proposition 2 (Postulat 5 hyperbolique)

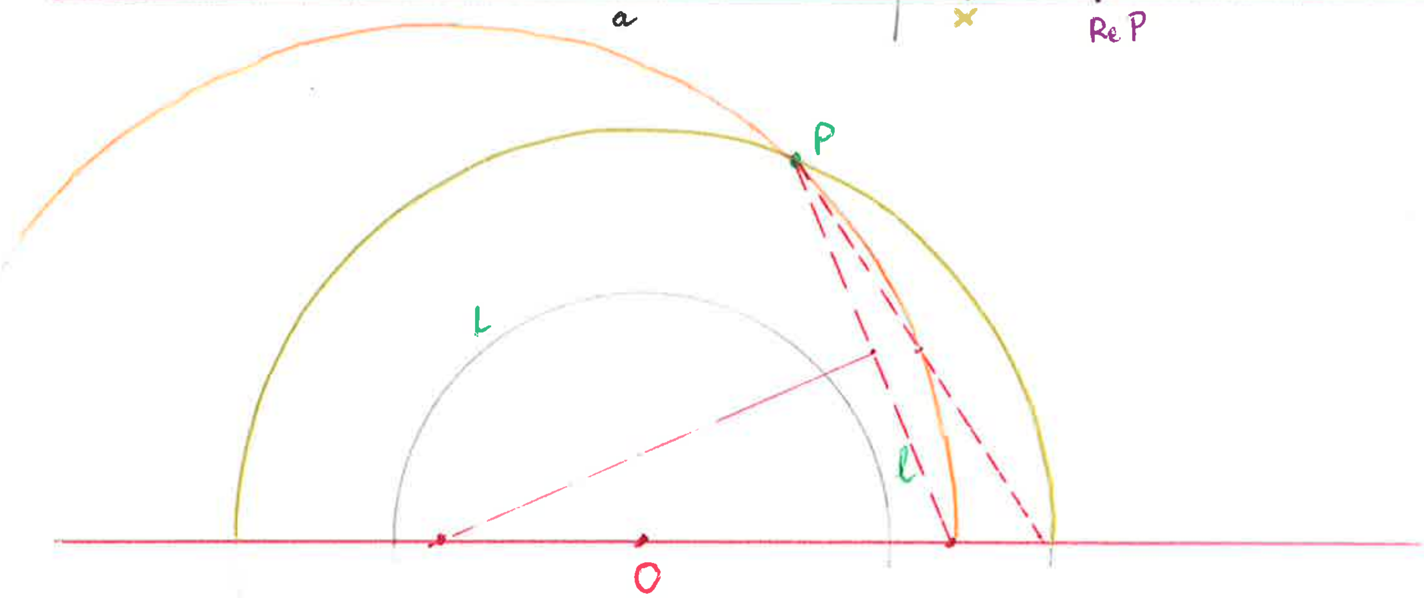
Soit l une droite hyperbolique de $\mathbb{H}$ et soit $P \in \mathbb{H}$ un point de $\mathbb{H}$ tel que $P \notin l$. Alors il existe une infinité des droites hyperboliques distinctes, passant par P et parallèles à l.

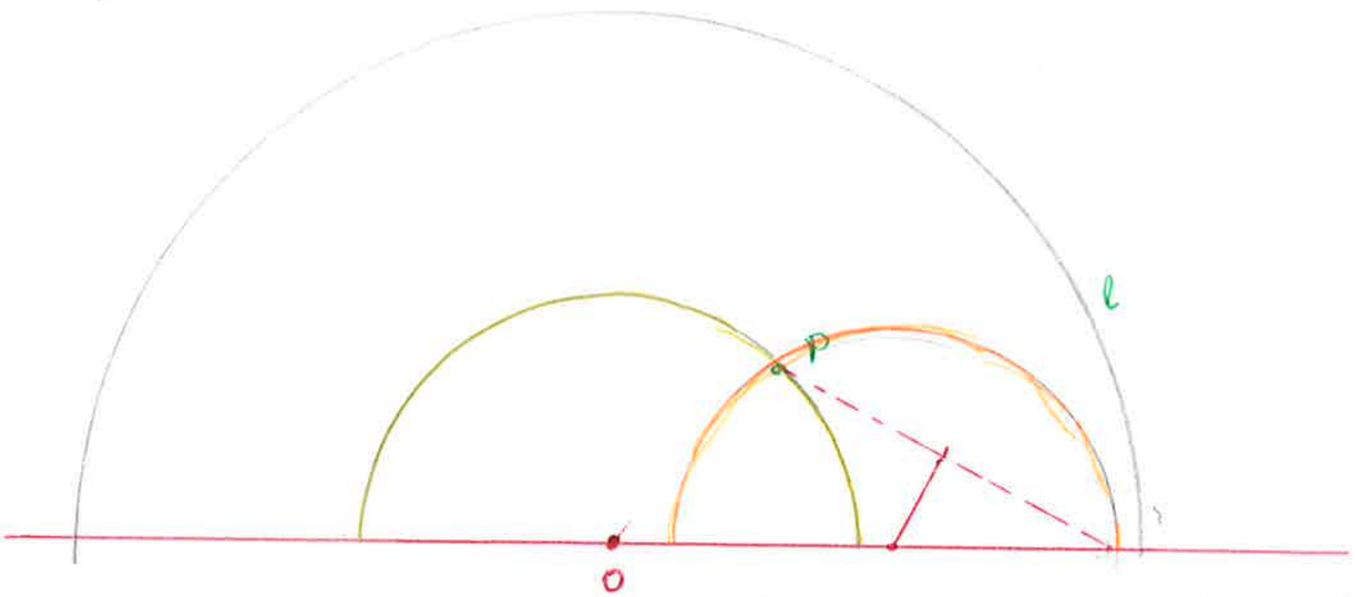
Preuve. Soit $l = l_{a,\infty}$ et soit $P \notin l_{a,\infty}$. Alors $b = \operatorname{Re} P \neq a$. La droite hyp. $l_{b,\infty}$ est disjointe avec l, donc $l_{b,\infty} \parallel l$ et $P \in l_{b,\infty}$.



Soit $x \in \mathbb{R}$, $a < x < b$. Alors la droite hyp. d_x est aussi disjointe avec ℓ, donc $d_x \parallel \ell$ et $P \in d_x$.







On pose $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et

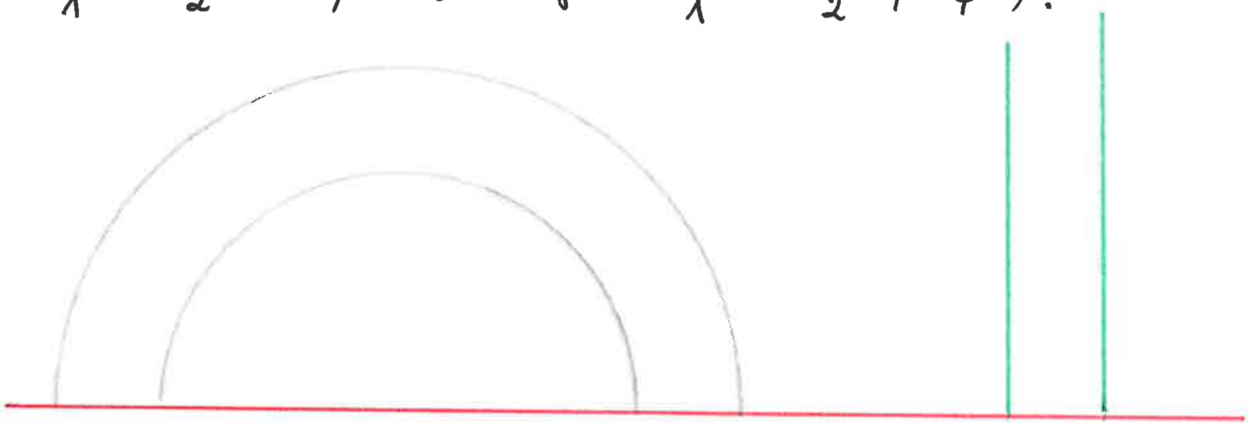
$\overline{\mathbb{H}} := \mathbb{H} \cup \overline{\mathbb{R}} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im m\, z \geqslant 0\} \cup \{\infty\}$.

On pose

$$\overline{l}_{a,\infty} := l_{a,\infty} \cup \{a, \infty\},$$

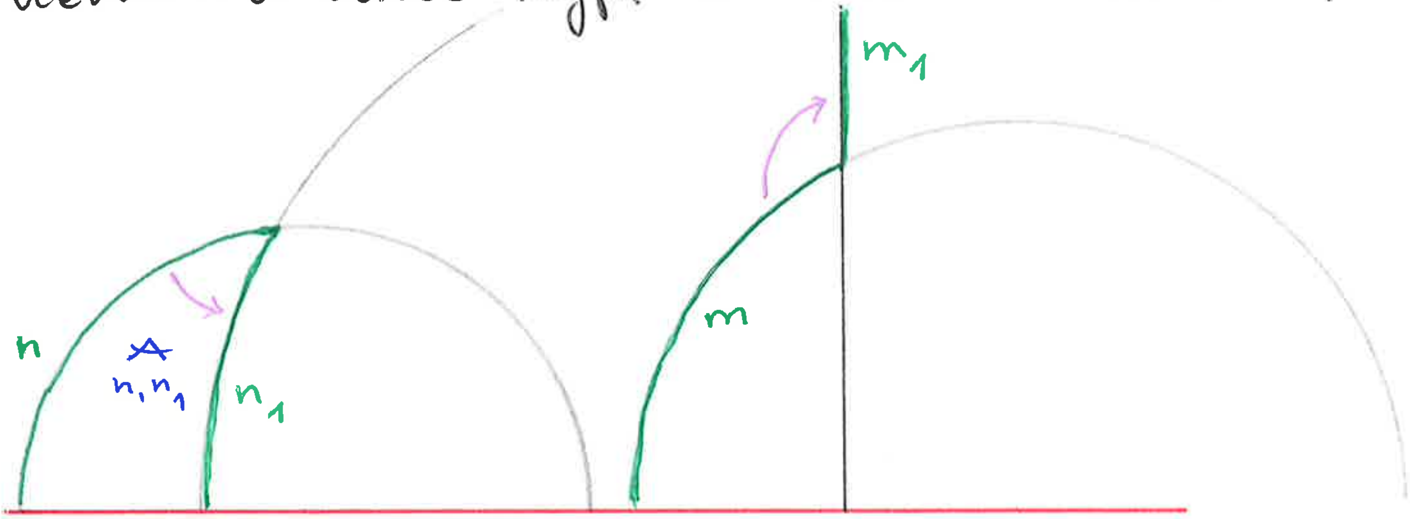
$$\overline{l}(a,r) := l(a,r) \cup \{a-r, a+r\} = \overline{\mathbb{H}} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = r\}.$$

Définition. On dit que des droites hyp. parallèles l_1 et l_2 sont ultraparallèles (resp. parallèles asymptotiques) si $\overline{l}_1 \cap \overline{l}_2 = \emptyset$ (resp. $\overline{l}_1 \cap \overline{l}_2 \neq \emptyset$).



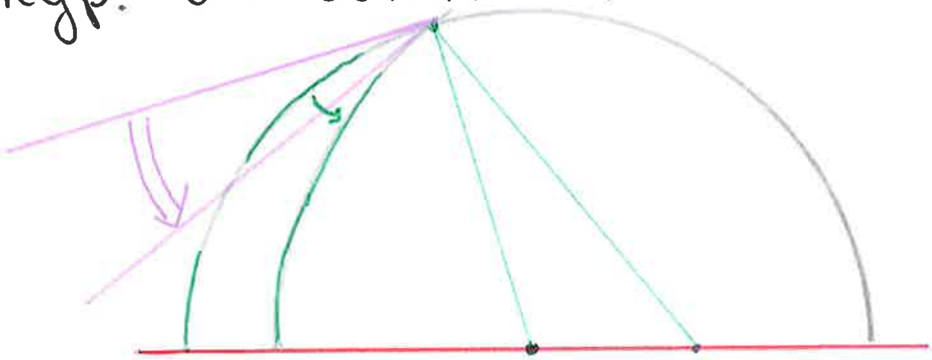
Angle hyperbolique

<u>Définition</u>. On appelle un angle hyperbolique une paire ordonnée de deux démi-droites hyp. de même sommet.



On rappelle que $\mathbb{C}$ a l'orientation canonique, la classe de la base $1, i$.

<u>Définition</u>. La mesure d'un angle hyp. est sa mesure euclidienne, c'est-à-dire la mesure euclidienne de l'angle entre les démi-droites euclidiennes tangentes aux démi-droites hyp. en sommet.

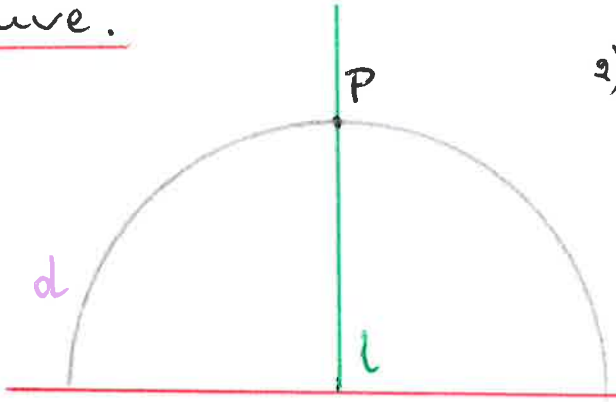


Droites hyperboliques perpendiculaires.

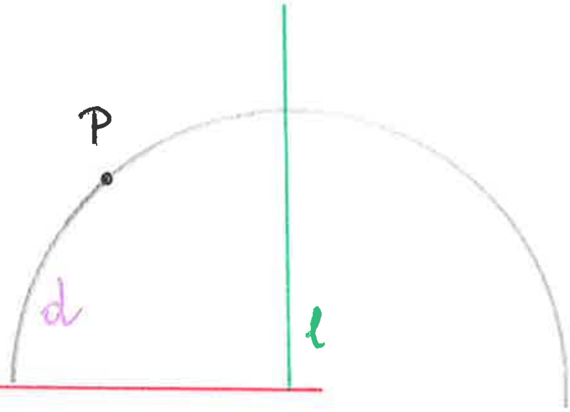
Proposition 3. Soit l une droite hyp. de $\mathbb{H}$ et soit $P \in \mathbb{H}$ un point. Alors il existe une unique droite hyp. d passant par P et perpendiculaire à l.

Preuve.

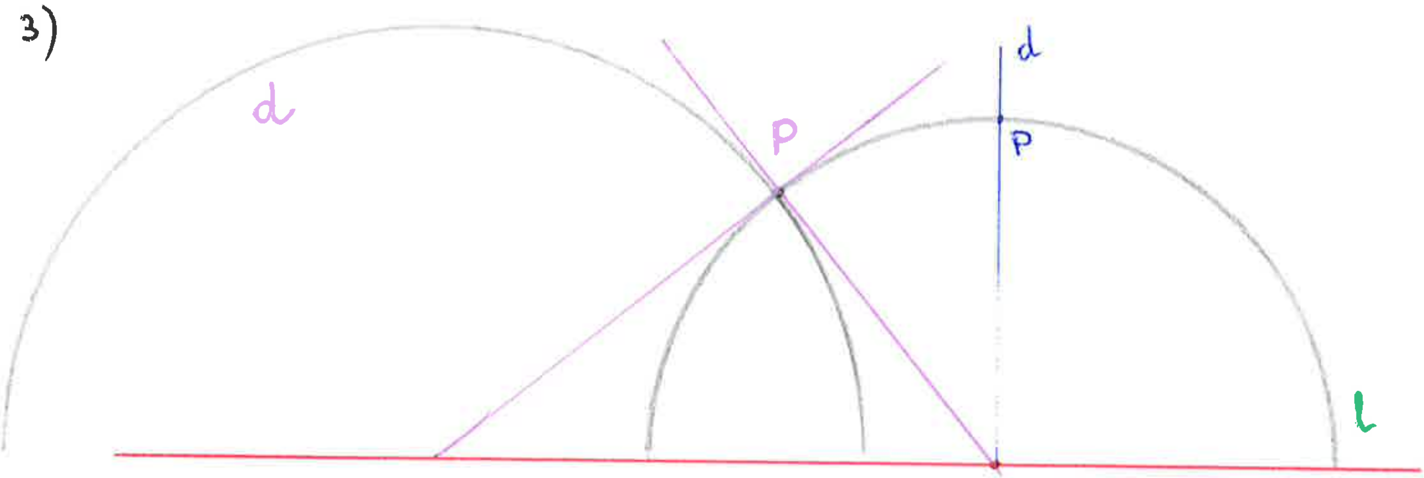
1)



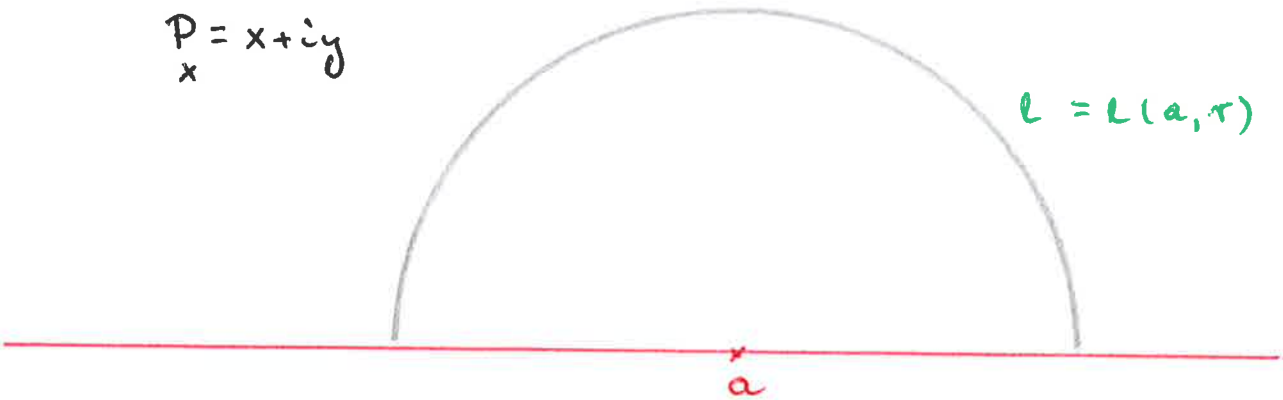
2)



3)



4)



On cherche $l(b,R)$ passant par P et orthogonal à $l(a,r)$.

Donc on cherche $b \in \mathbb{R}$, tel que

$$|x+iy-b|^2 + r^2 = |a-b|^2 .$$

$$(x-b)^2 + y^2 + r^2 = (a-b)^2$$

$$x^2 - 2xb + \cancel{b^2} + y^2 + r^2 = a^2 - 2ab + \cancel{b^2}$$

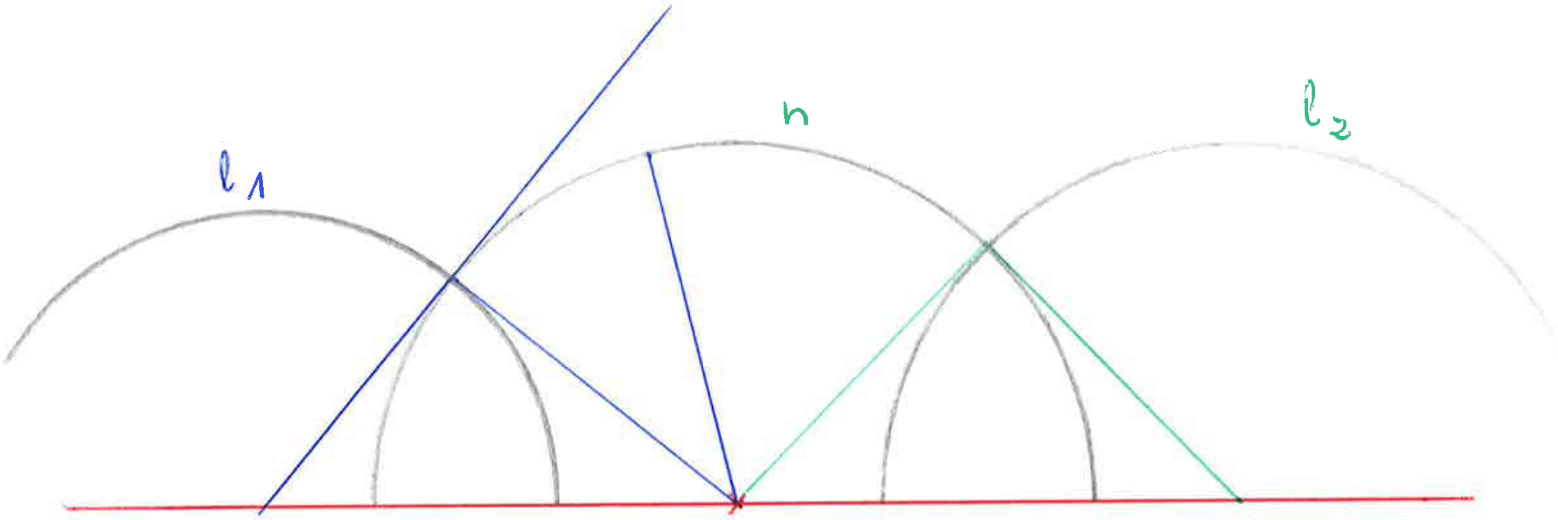
$$2(a-x)b = a^2 - x^2 - y^2 - r^2 .$$

Si $x \neq a$, alors on trouve un unique b. Alors

$$l(b,R) \perp l(a,r) \text{ et } P \in l(b,R),$$

où $b = \dfrac{a^2-x^2-y^2-r^2}{2(a-x)}$, $R = |x+iy-b|$.

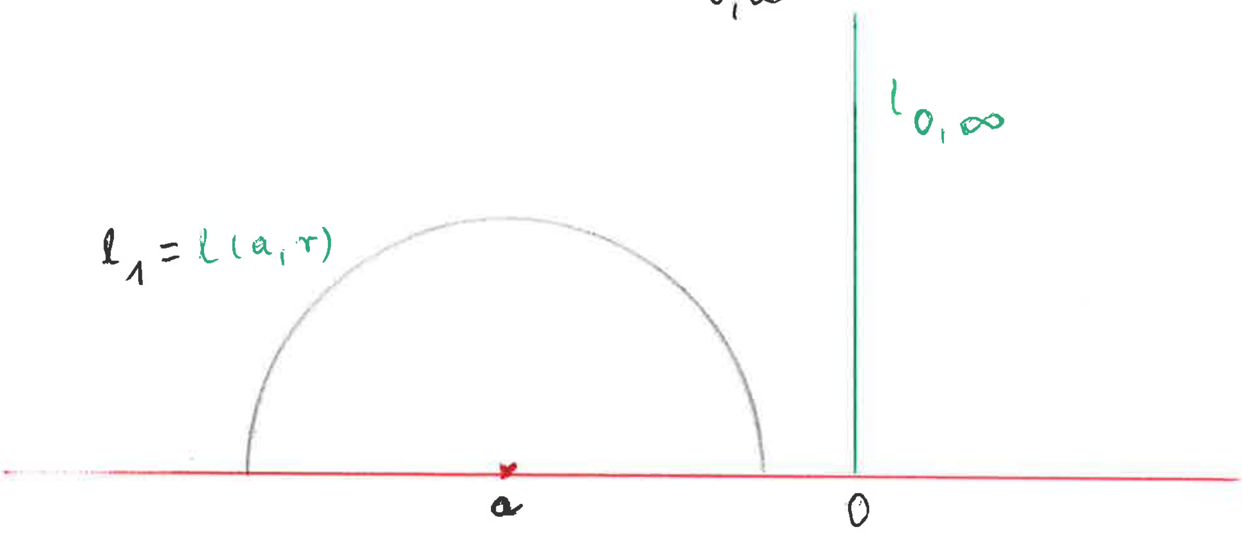
Si $x = a$, alors $l_{a,\infty} \perp l(a,r)$ et $P \in l_{a,\infty}$.



Proposition 4. Les droites hyperboliques l_1 et l_2 sont ultraparallèles si et seulement si il existe une droite hyperbolique n perpendiculaire à l_1 et l_2. La droite n est alors unique.

Preuve.

cas particulier : $l_2 = l_{0,\infty}$.



Si l_1 et l_2 sont ul pa. Soit $r_1 = \sqrt{|a|^2 - r^2}$

alors ~~p~~ ~~a~~ $r < |a-0| = |a|$. Alors

$l(0, r_1)$ ~~~~ est pe à l_1 et l_2 et

c'est le unique droite avec

cette propriété.

Suppose que $n \perp l_1$ et

$n \perp l_2$. Alors $n = l(r_1, 0)$ pour

certain $r_1 > 0$. ~~Alors~~ $r^2 + r_1^2 = a^2$,

donc ~~$|a| > r$~~. ~~donc~~

l_1 et l_2 sont ultraparallèles

car $|a| > r$.

Définition (Longueur d'une courbe paramétrée dans l'espace hyperbolique $\mathbb{H}$).

Soit $M : [a, b] \longrightarrow \mathbb{H}$, $M(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$ une courbe paramétrée régulière ($\forall\, t$, $z'(t) \neq 0$). Longueur hyperbolique (l.h.) de la courbe paramétrée $M : [a, b] \to \mathbb{H}$ est

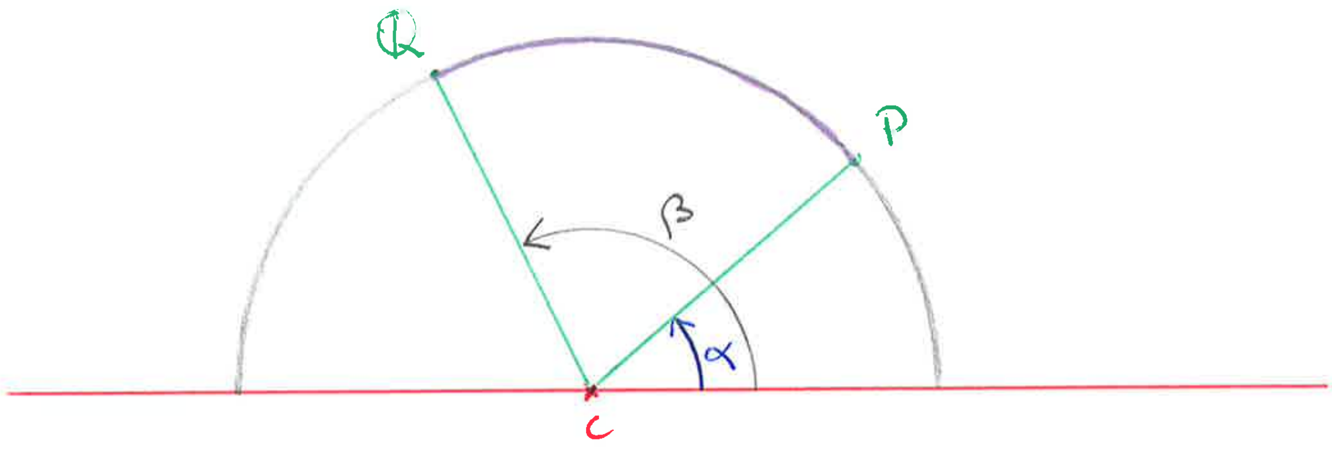
$$\int_a^b \frac{|dz(t)|}{\operatorname{Im} z(t)} = \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)}\, dt ,$$

Proposition 5. Soient P et Q deux points de la droite hyperbolique $l(c, r)$ de $\mathbb{H}$. Soient $\alpha = \widehat{r, P-c}$ et $\beta = \widehat{r, Q-c}$ les angles entre les vecteurs de $\mathbb{C}$. Alors la longueur hyperbolique du segment hyperbolique de P à Q (arc du cercle euclidien de P à Q) est

l.h.(segment hyperbolique de P à Q) =

$$\text{l.h.}([P, Q]_{hyp}) = \log \frac{\csc\beta - \cot\beta}{\csc\alpha - \cot\alpha} ,$$

où $\csc t := \frac{1}{\sin t}$ (csc — cosécant).



Preuve.

$$z(t) = c + r e^{it} \quad , t \in \,]0, \pi]$$

paramétrisation de $l(c, r)$. On note les mesures des angles $\widehat{r, P-c}$ et $\widehat{r, Q-c}$ par α et β respectivement.

Donc

$$l.h.([P, Q]_{hyp}) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{r^2(-\sin t)^2 + r^2(\cos t)^2}}{r \sin t}\, dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{\sin t} = \log(\csc t - \cot t)\Big|_{\alpha}^{\beta} =$$

$$\log(\csc \beta - \cot \beta) - \log(\csc \alpha - \cot \alpha).$$

$$\log(\csc t - \cot t)' = \left(\log \frac{1 - \cos t}{\sin t}\right)' = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \cdot \frac{(\sin t)^2 - (1 - \cos t)\cos t}{\sin^2 t}$$

$$= \frac{1 - \cos t}{(1 - \cos t)\sin t} = \frac{1}{\sin t}.$$

∎

Postulat 2 de Euclide. Il est demandé d'admettre que l'on peut prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée.

Preuve. Soit $[P,Q]_{hyp}$ un segment hyperbolique sur $l(c,r)$. Alors

$$l.h.([P,Q]_{hyp}) = \log\left(\frac{\csc\beta - \cot\beta}{\csc\alpha - \cot\alpha}\right).$$

On a

$$(\csc\alpha - \cot\alpha)(\csc\alpha + \cot\alpha) =$$

$$\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 1.$$

Donc

$$l.h.([P,Q]_{hyp}) = \log\left((\csc\beta - \cot\beta)(\csc\alpha + \cot\alpha)\right).$$

si $\alpha \to 0$ alors $\csc\alpha + \cot\alpha \longrightarrow +\infty$, donc si P, restant sur $l(c,r)$, s'approche $c+r$ (au sens euclidien), alors

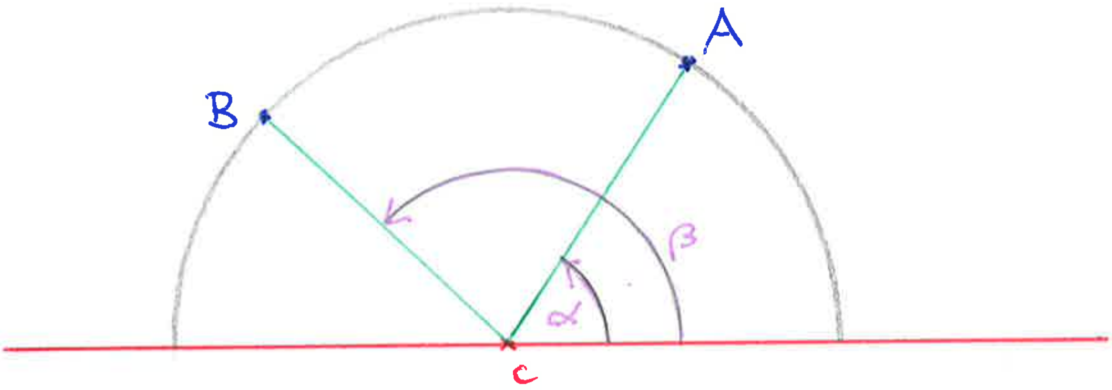
$$l.h.([P,Q]_{hyp}) \longrightarrow +\infty.$$

Le cas quand $[P,Q]_{hyp}$ est sur $l_{a,\infty}$ on fera en T.D. ∎

Proposition 6. Soient $A, B \in \mathbb{H}$ et l la droite hyperbolique passant par A et B. Soit $M : [a,b] \to \mathbb{H}$ une courbe paramétrée régulière telle que $M(a) = A$ et $M(b) = B$. Alors

$$l.h.([A,B]_{hyp}) \leqslant l.h.(\text{courbe paramétrée } M).$$

Preuve.



Soient $A = x_1 + iy_1$ et $B = x_2 + iy_2$. Supposons que $x_1 \neq x_2$. Alors la droite $l(c,r)$ passe par A et B. Supposons que la courbe admet une paramétrisation par l'angle. Alors

$$x(\theta) = r(\theta)\cos\theta \quad , \quad y(\theta) = r(\theta)\sin\theta ,$$

$$x'(\theta) = r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta ,$$

$$y'(\theta) = r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta ,$$

et

$x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 = r'(\theta)^2 + r(\theta)^2$. Donc

$$\text{l.h.(de la courbe M)} = \int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}}{y(\theta)}\, d\theta =$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2}}{r(\theta)\sin\theta}\, d\theta \geqslant \int_\alpha^\beta \frac{d\theta}{\sin\theta} = \text{l.h.}([P,Q]_{hyp}).$$

. . . .

$\blacksquare$

Corollaire. Le plus court chemin de A à B dans le plan hyperbolique $\mathbb{H}$ est le long de la droite hyperbolique passant par A et B. $\blacksquare$

Définition. Soient $A, B \in \mathbb{H}$. On définit la distance hyperbolique de A à B par

$$d_h(A,B) := \text{l.h.}([A,B]_{hyp}).$$

Théorème. La fonction $d_h : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une métrique sur $\mathbb{H}$.

Corollaire. Topologie définie sur $\mathbb{H}$ par la métrique d_h est la même que la topologie induite sur $\mathbb{H}$ comme un sous-ensemble de $\mathbb{C}$.

Isométries hyperboliques

Définition. On dit que $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ est une isométrie hyp. si

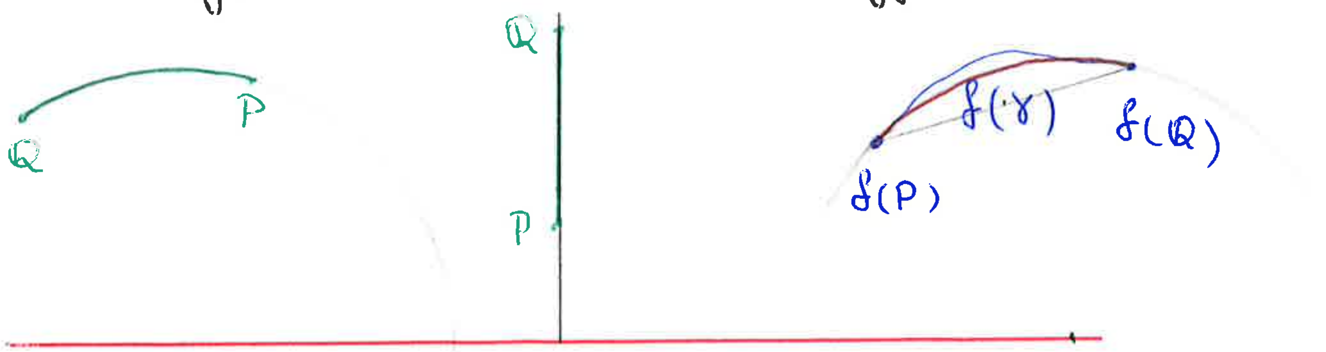
$$\forall\, P, Q \in \mathbb{H}, \quad d_h(P,Q) = d_h(f(P), f(Q)).$$

Proposition 6. Soit $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ une application bijective de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g = f^{-1}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que pour chaque courbe regulière de classe $\mathcal{C}^1$ $\gamma : [0,1] \to \mathbb{H}$ on a

$$l.h.(\gamma) = l.h.(f(\gamma)) = l.h.(g(\gamma)).$$

Alors f est une isométrie hyperbolique.

Preuve.
Soient $P, Q \in \mathbb{H}$ et $\gamma : [0,1] \to [P,Q]_{hyp} \subset \mathbb{H}$ une paramétrisation regulière du segment hyperbolique $[P,Q]_{hyp}$.



Alors

$$d_h(P,Q) = \text{l.h.}(\gamma) = \text{l.h.}(f(\gamma)) \geqslant d_h(f(P), f(Q)).$$

Soit $\delta : [0,1] \to [f(P), f(Q)]_{hyp} \subset \mathbb{H}$ une paramétrisation du segment hyp. $[f(P), f(Q)]_{hyp}$. On a

$$d_h(f(P), f(Q)) = \text{l.h.}(\delta) = \text{l.h.}(g(\delta)) \geqslant d_h(P,Q).$$

Alors $d_h(P,Q) = d_h(f(P), f(Q))$, donc f est une isométrie hyperbolique. ∎

Théorème Les application suivantes de $\mathbb{H}$ sont des isométries hyperboliques et elle envoient des droites hyperboliques sur des droites hyperboliques :

i) $h(\infty)_r : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $h(\infty)_r(z) = z + r$ avec $r \in \mathbb{R}$.

On appelle $h(\infty)_r$ la horolation (déplacement) autour de la direction ∞

ii) $\tau(l_{c,\infty})_k : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $\tau(l_{c,\infty})_k(z) = c + k(z-c)$ avec $c \in \mathbb{R}$ et $k > 0$. On appelle $\tau(l_{c,\infty})_k$ la translation le long de la droite hyp. $l_{c,\infty}$

iii) $R_{l_{r,\infty}} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$, $R_{l_{r,\infty}}(z) = -\bar{z} + 2r$ avec $r \in \mathbb{R}$. On appelle $R_{l_{r,\infty}}$ la réflexion par rapport à la droite hyp. $l_{r,\infty}$.

iv) $R_{l(c,r)} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$, $R_{l(c,r)}(z) = I_{c,r^2}(z) = c + \dfrac{r^2}{\bar{z}-c}$.

C'est la réflexion par rapport à la droite hyp. $l(c,r)$.

v) $f_A : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$, $f_A(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ où

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \text{ et } \det A = 1.$$

vi) $f_A \circ R_{l_{0,\infty}}$ où $A \in M_2(\mathbb{R})$ et $\det A = 1$.

Les applications dans i), ii) et v) préservent des angles et les applications envoient un angle α sur $-\alpha$.

Preuve.

v) On a $f_A(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} =$

$$\frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2}=\frac{acz\bar{z}+bd+adz+bc\bar{z}}{|cz+d|^2}.$$

Donc $\operatorname{Im}\frac{az+b}{cz+d}=\operatorname{Im}\frac{adz+bc\bar{z}}{|cz+d|^2}=\frac{(ad-bc)}{|cz+d|^2}\operatorname{Im} z$.

Soit $\gamma:[0,1]\to\mathbb{H}$ une courbe regulière de classe C^1. Alors

$$l.h.(f_A(\gamma))=\int_0^1\frac{|d\,f_A(\gamma(t))|}{\operatorname{Im} f_A(\gamma(t))}=\int_0^1\frac{|f_A'(\gamma(t))\,d\gamma(t)|}{\operatorname{Im} f_A(\gamma(t))}=$$

$$\int_0^1\frac{\left|\frac{a(\cancel{c\gamma(t)}+d)-(\cancel{a\gamma(t)}+b)c}{(\cancel{c\gamma(t)+d})^2}d\gamma(t)\right|}{\frac{\operatorname{Im}\gamma(t)}{|c\cancel{\gamma(t)+}d|^2}}=\int_0^1\frac{|d\gamma(t)|}{\operatorname{Im}\gamma(t)}=$$

$l.h.(\gamma)$.

On vérifie que $f_A:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ est bijective et $g(z)=f_A^{-1}(z)=\frac{dz-b}{-cz+a}$. Donc on a aussi $l.h.(g(\gamma))=l.h.(\gamma)$. Proposition 6 implique que $f_A:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ est une isométie hyperbolique.

On a

$$z+\tau=\frac{1\cdot z+\tau}{0\cdot z+1}\quad\text{et}\quad k(z-c)+c=\frac{\sqrt{k}\cdot z+\frac{c}{\sqrt{k}}(1-k)}{0\cdot z+\frac{1}{\sqrt{k}}}.$$

Donc les horotations autour de la direction ∞ et les translations le long des droites $l_{c,\infty}$ sont des isométries hyperboliques.

Soit $R = R_{l_{0,\infty}}$, donc $R(z) = -\bar{z}$. Si $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, alors $R(\gamma(t)) = -x(t) + iy(t)$.

On a

$$l.h.(R(\gamma)) = \int_0^1 \frac{\sqrt{(-x(t)')^2 + y'(t)^2}\,dt}{y(t)} = \int_0^1 \frac{|d\gamma(t)|}{\Im m\,\gamma(t)} =$$

$l.h.(\gamma)$. L'application $R : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ est bijective et $R = R^{-1}$ donc R est une isométrie hyp.

On a $R_{l_{r,\infty}} = h(\infty)_{2r} \circ R$. De plus la composé des isométries hyp. est une isométrie hyp. Donc $R_{l_{r,\infty}}$ est une isométrie hyp.

L'application $\varphi(z) = -\frac{1}{z}$ est une isométrie hyp. car $\varphi(z) = f_A(z)$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $R_{l(0,1)} = R_{l_{0,\infty}} \circ \varphi$ est une isométrie hyp.

On a

$$R_{l(c,r)} = h(\infty)_c \circ \tau(l_{0,\infty})_{r^2} \circ R_{l(0,1)} \circ h(\infty)_{-c}$$

$$\left(z \longmapsto z - c \longmapsto \frac{1}{\bar{z} - c} \longmapsto \frac{r^2}{\bar{z} - c} \longmapsto c + \frac{r^2}{\bar{z} - c} \right).$$

Donc les réflexions (par rapport à une droite hyp.) sont des isométrie hyp.

Le point vi) est évident.

Les applications i), ii), iii) et iv) envoient des droites hyp. sur des droites hyp.

Observons que $\varphi = R_{l_{0,\infty}} \circ R_{l(0,1)}$

$\left(z \longmapsto \frac{1}{\bar{z}} \longmapsto -\frac{1}{z} = \varphi(z) \right)$. Donc φ envoie des droites hyp. sur des droites hyp.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et dét $A = 1$. Supposons que $c \neq 0$. Alors

$$f_A(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) + b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)} =$$

$$\frac{a}{c} + \frac{1}{-(c^2 z + cd)},$$ donc f_A envoie des droites hyp. sur des droites hyp.

Si $c = 0$ alors $f_A(z) = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d}$, donc ...

. . . . .

La dernière partie du théorème est la conséquence de A.8 et d'anticonformité d'inversion. $\blacksquare$

Notation. Soit d une droite hyp. On note R_d la réflexion par rapport à la droite d.