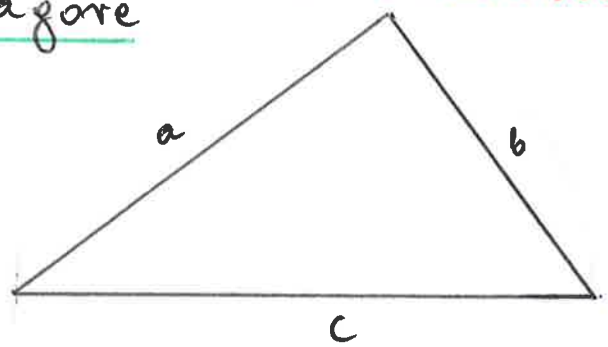
$\sqrt{2}$

GÉOMÉTRIE

Th. de Pythagore



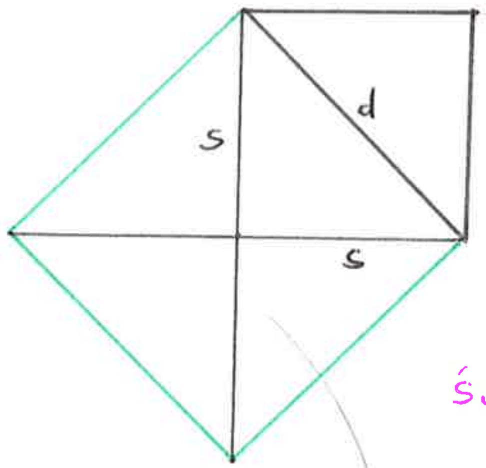
$a^2 + b^2 = c^2$

Pythagore ~580 AC

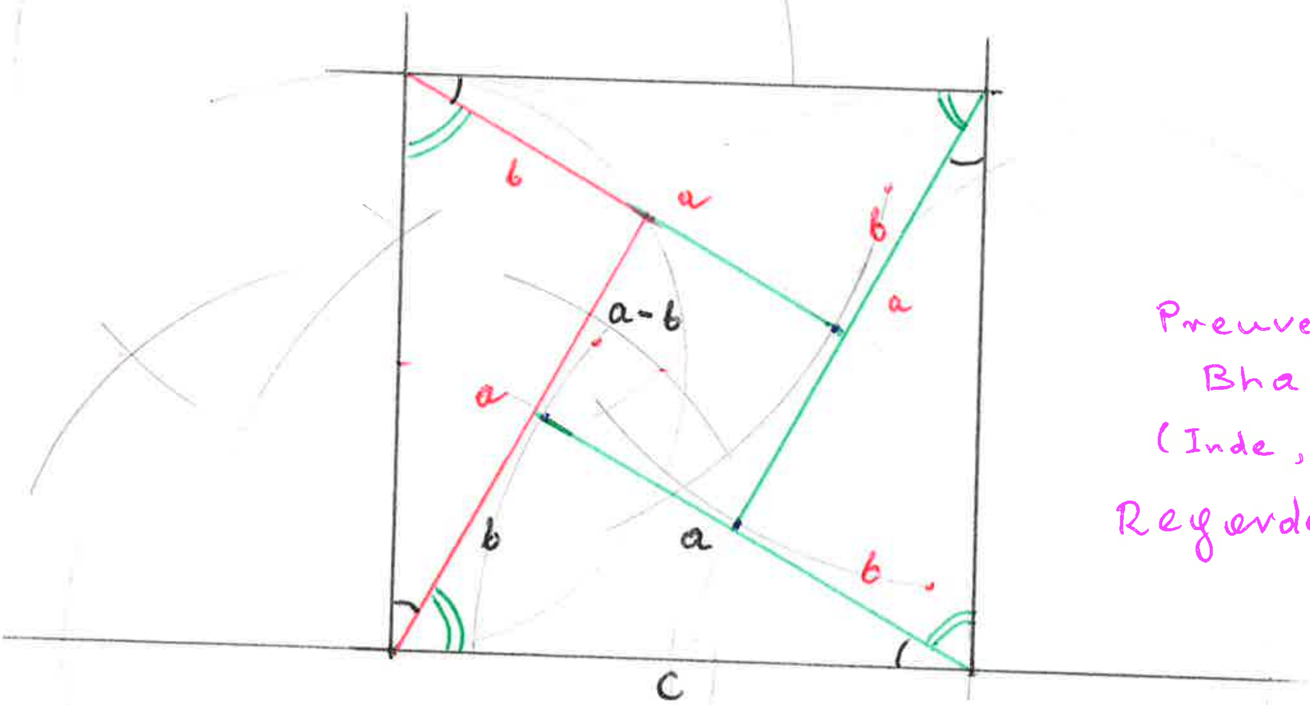
Inde (Śulbasūtra) avant 800 AC ?

Chine

Preuve.



Śulbasūtra, avant 800 AC ?

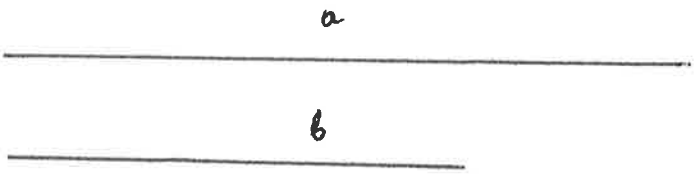


Preuve de Bhaskara II (Inde, 1050)

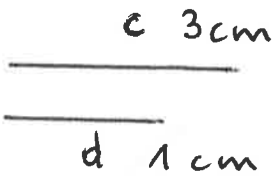
Regarde !

$$c^2 = 4\,\frac{ab}{2} + (a-b)^2$$

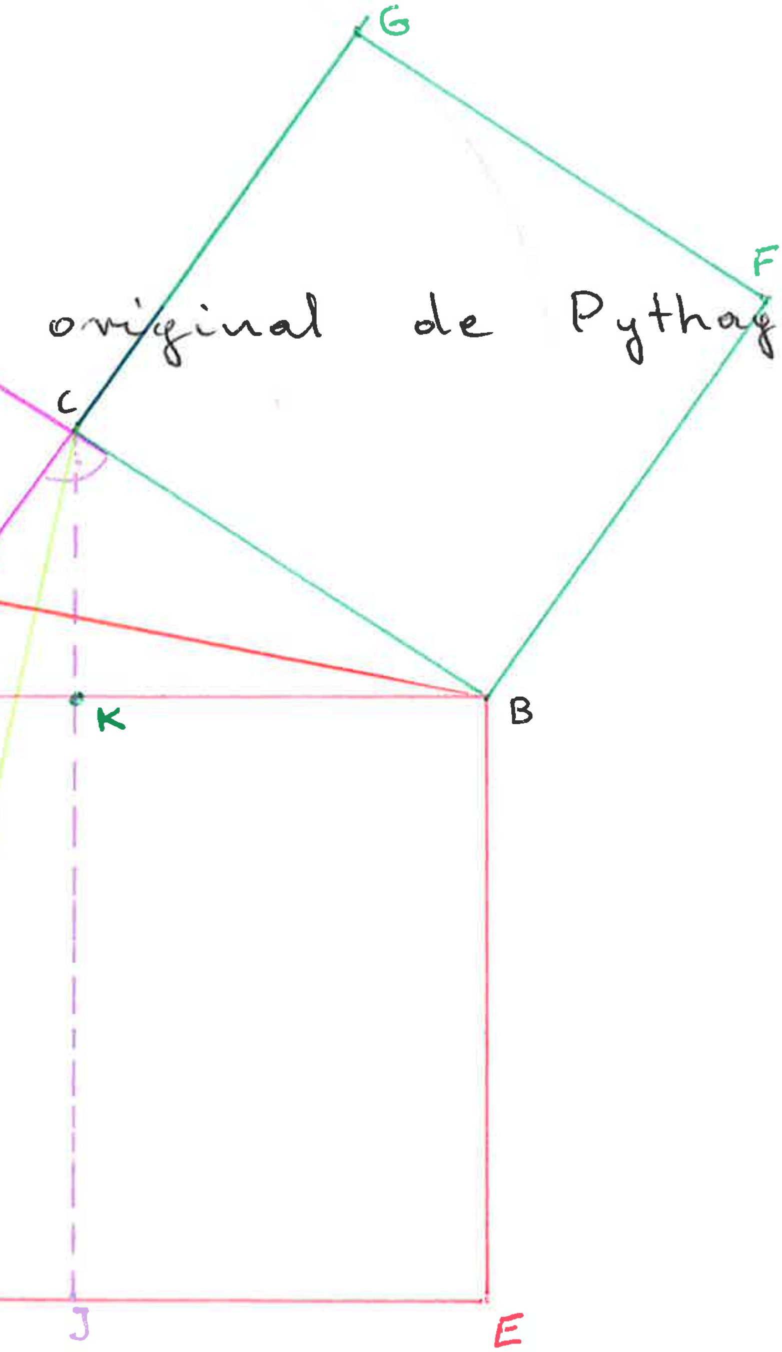
Définition. Soient a, b deux magnitudes. On dit que rapport ("ratio") $a : b$ est comme $n : m$ où $n, m \in \mathbb{N}$ s'il existe une mesure commune c de a et de b telle que $a = nc$ et $b = mc$.



$a : b = c : d = 3 : 1$



" Preuve original de Pythagore " ?



$$AC : AK = m_1 : n_1 = k_1 : n$$

$$BC : AK = m_2 : n_2 = k_2 : n$$

$$AB : AK = m_3 : n_3 = k_3 : n$$

α mesure commune telle que $AK = n\alpha$, $AC = k_1\alpha$, $BC = k_2\alpha$ et $AB = k_3\alpha$. $\Rightarrow BK = (k_3 - n)\alpha$

$\triangle ABC \sim$ (similaire au) $\triangle ACK$

$\triangle ABC \sim \triangle CBK$.

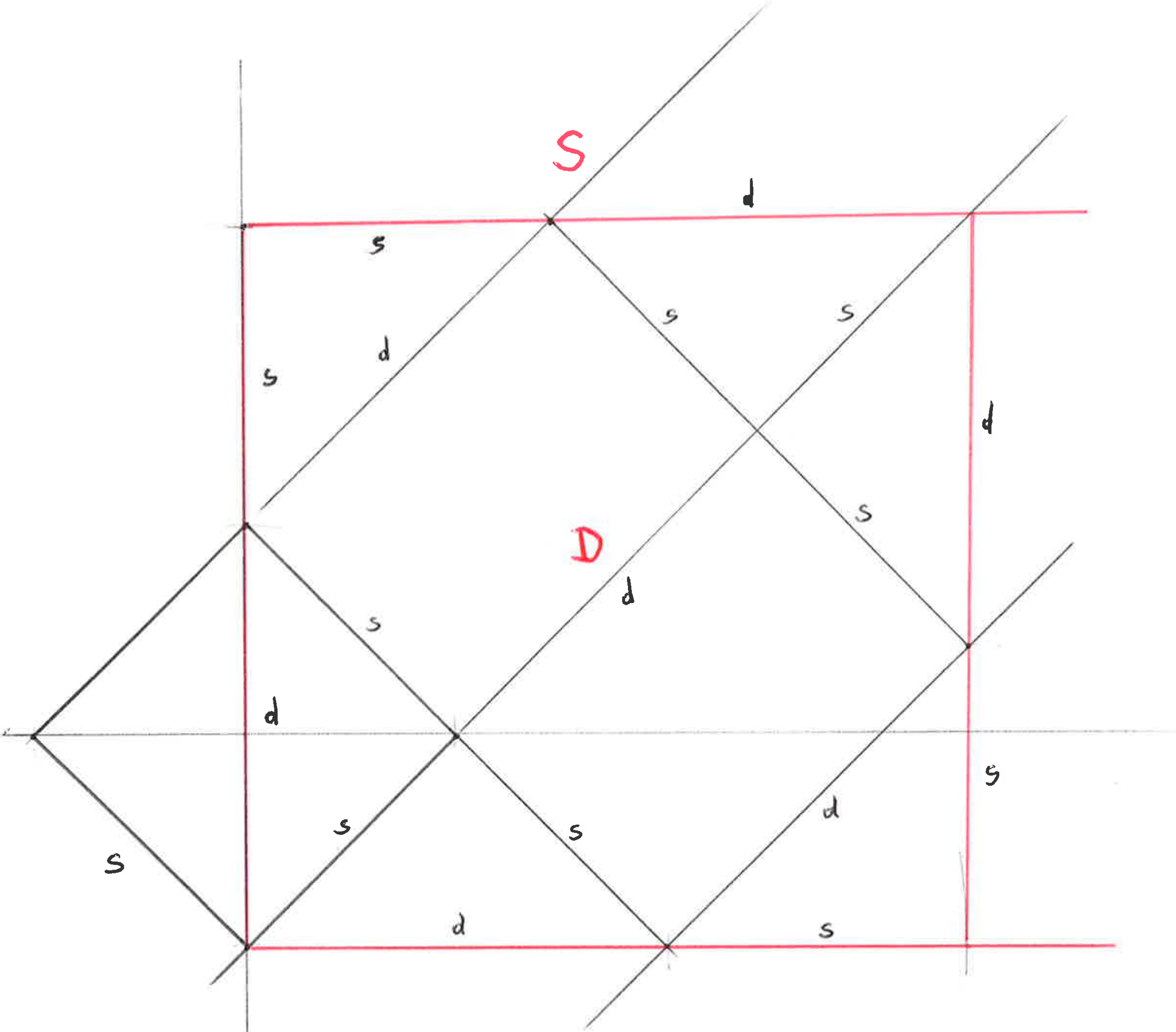
Donc $AC : AK = AB : AC$

$CB : BK = AB : CB$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{k_1}{n} = \dfrac{k_3}{k_1} \\[2ex] \dfrac{k_2}{k_3 - n} = \dfrac{k_3}{k_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1^2 = k_3 n \\[2ex] k_2^2 = k_3(k_3 - n) \end{array}\right\} +$$

$$\Rightarrow k_1^2 + k_2^2 = k_3^2$$ donc

$$AC^2 + BC^2 = AB^2.$$



$$S = s + d \qquad D^2 = 2S^2$$

$$D = 2s + d$$

$$(D, S) \longrightarrow (S, D - S) = (S, s)$$

$$\longrightarrow (S - s, s) = (d, s) \qquad d^2 = 2s^2$$

Théorème 1 La diagonale et le côté d'un carré ne sont pas commensurables.
(Th. de Pythagore ou Pythagoriciens).

Preuve.

On applique l'algorithme d'Euclide aux diagonale D et côté S d'un carré.

Après deux pas on obtient une diagonale d et un côté s d'un carré avec $d < \frac{1}{2} D$ et $s < \frac{1}{2} S$.

Supposons que D et S ont une mesure commune α $(\alpha > 0)$.

α

Après n pas on obtient une diagonale d_n et un côté s_n d'un carré avec

$$d_n < \frac{1}{2^n} D \quad \text{et} \quad s_n < \frac{1}{2^n} S.$$

α est une mesure commune de D et S, donc α est une mesure commune de d_n et s_n.

Si $D = m\alpha$ et $2^n > m$ alors α est une mesure de $0 < d_n < \alpha$, c'est impossible, donc D et S ne sont pas commensurables.

Preuve de Pythagore ou Pythagoriens.

Supposons que D et S ont une mesure commune α. (On peut prendre α comme l'unité). On peut supposer $\alpha = PGMC(D, S)$

$\underline{\quad\alpha\quad}$

Alors $D : S = n : m$ $(n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$.
avec n et m premiers entre eux.
Donc

$$2 = D^2 : S^2 = n^2 : m^2$$

$$2m^2 = n^2.$$

n^2 est donc paire. Donc n est un nombre paire. $n = 2k$,
alors

$$2m^2 = 4k^2$$

Donc m^2 est paire, implique m est paire.

n et m sont donc des nombres paires. On a supposer $PGCD(n, m) = 1$.

Donc D et S n'ont pas une mesure commune.

Corolleire. N'existe pas $q \in \mathbb{Q}$ tel que $q^2 = 2$.

Théorème (Pythagore ou Pythagoriens)

La suite (d_n, s_n) des paires de nombres naturels définie par

$$d_1 = 1,\ s_1 = 1 \quad \text{et} \quad (d_{n+1}, s_{n+1}) := (2s_n + d_n,\ s_n + d_n)$$

satisfait l'équation

$$d_n^2 - 2s_n^2 = (-1)^n .$$

Preuve.

Comment on a trouvé cette solution et pourquoi on s'intéresse à l'équation $X^2 - 2Y^2 = 1$ (ou -1) ?

Si quelqu'un croyait (peut-être avant le théorème 1), que D et S ont une mesure commune. Alors en faisant l'algorithme d'Euclide en sense inverse après très ~~grands~~ nombres de pas on arrive à D, S.

Cette mesure commune on prend comme l'unité

$$d_1 = 1 \quad \text{et} \quad s_1 = 1 \qquad\qquad (d, s)$$

$$\downarrow$$

$$d_2 = 3 \qquad s_2 = 2 \qquad\qquad D = d + 2s,\ S = d + s$$

$$(d_3, s_3) = (7, 5)$$

$$(d_4, s_4) = (17, 12)$$

$$\vdots \qquad (41, 29)$$

On vérifie

$$1^2 - 2\cdot 1^2 = -1$$
$$3^2 - 2\cdot 2^2 = 1$$
$$7^2 - 2\cdot 5^2 = -1$$
$$17^2 - 2\cdot 12^2 = 1$$

Preuve

$$d_{n+1}^2 - 2s_{n+1}^2 = (2s_n + d_n)^2 - 2(s_n+d_n)^2 =$$
$$= 4s_n^2 + 4s_nd_n + d_n^2 - 2s_n^2 - 4s_nd_n - 2d_n^2$$
$$= 2s_n^2 - d_n^2 = -(d_n^2 - 2s_n^2) = -(-1)^n$$
$$= (-1)^{n+1}.$$

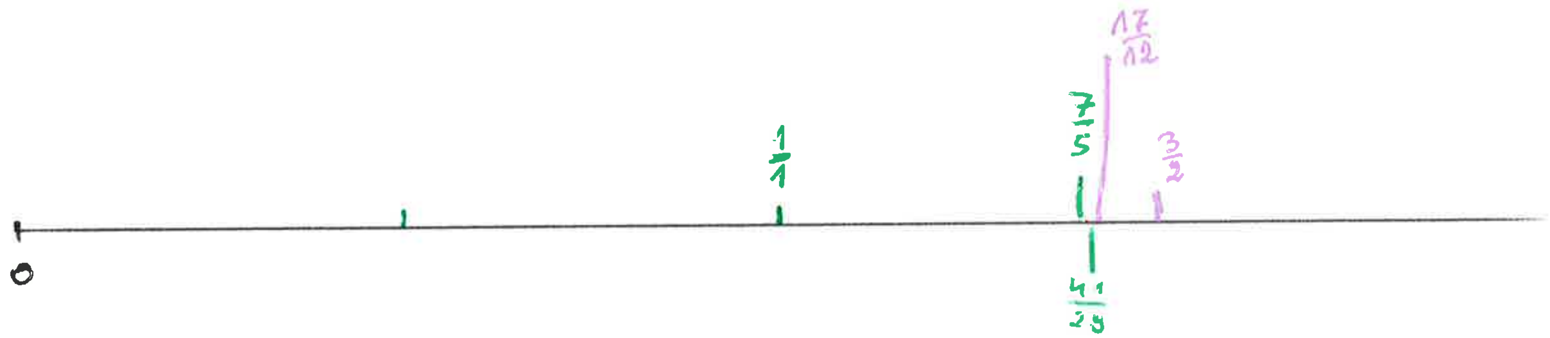
La preuve par récurrence est pour TD.
ne presente pas difficulté.

$$3^2 - 2\cdot 2^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 = \frac{1}{4}$$

$$7^2 - 2\cdot 5^2 = -1 \Rightarrow \left(\frac{7}{5}\right)^2 - 2 = \frac{-1}{25}$$

$$\left(\frac{17}{12}\right)^2 - 2 = \frac{1}{144}$$

$$\frac{17}{12} = 1.4166\ldots$$



Montrer que la suite

$$\left(\frac{d_{2k+1}}{s_{2k+1}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$ est strictement

croissante.

Montrer que la suite

$$\left(\frac{d_{2k}}{s_{2k}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

est strictement decroissante.

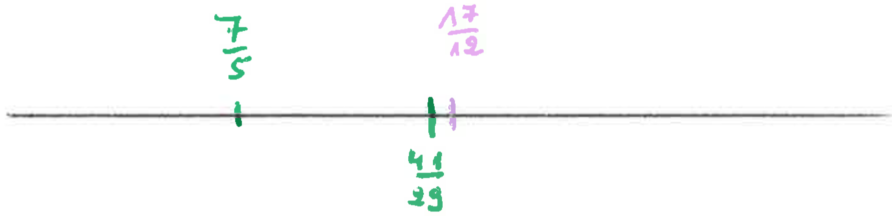
Montrer que

$$\frac{d_{2k+1}}{s_{2k+1}} < \frac{d_{2n}}{s_{2n}}$$

pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\ \exists\, A \in \mathbb{N}$,

$$\forall\, k, l > A \quad , \quad \left| \frac{d_k}{s_k} - \frac{d_l}{s_l} \right| < \frac{1}{n}.$$



$\mathbb{R}$

On cherche un corps ordonné (comme $\mathbb{Q}$) mais qui permet mesurer n'import quel intervelle, donc qui possède x t.q. $x^2 = 2$ $(\sqrt{2})$, y t.q. $y^3 = 2$, z - longuer d'un circle de rayon 1 (donc $z = 2\pi$), ...

Mais on ne veut pas α t.q. $\alpha^2 = -1$. Pourquoi ?

On n'a pas x tel que $x^2 = 2$ dans $\mathbb{Q}$, mais les nombres rationnels

$$1, \ \frac{3}{2}, \ \frac{7}{5}, \ \frac{17}{12}, \ \frac{41}{29}$$

ou

$$1 + \frac{1}{3}, \ 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4}, \ 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}, \dots$$

(Sulbaśutra : appelle aproxime)

ou $1, \ 1{,}4, \ 1{,}41, \dots$

semblent être plus et plus proche de tel x.

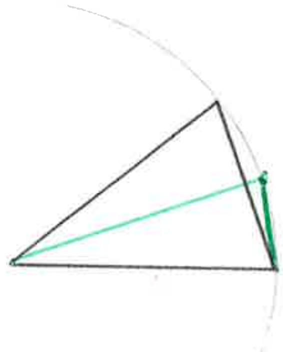
De même pour π

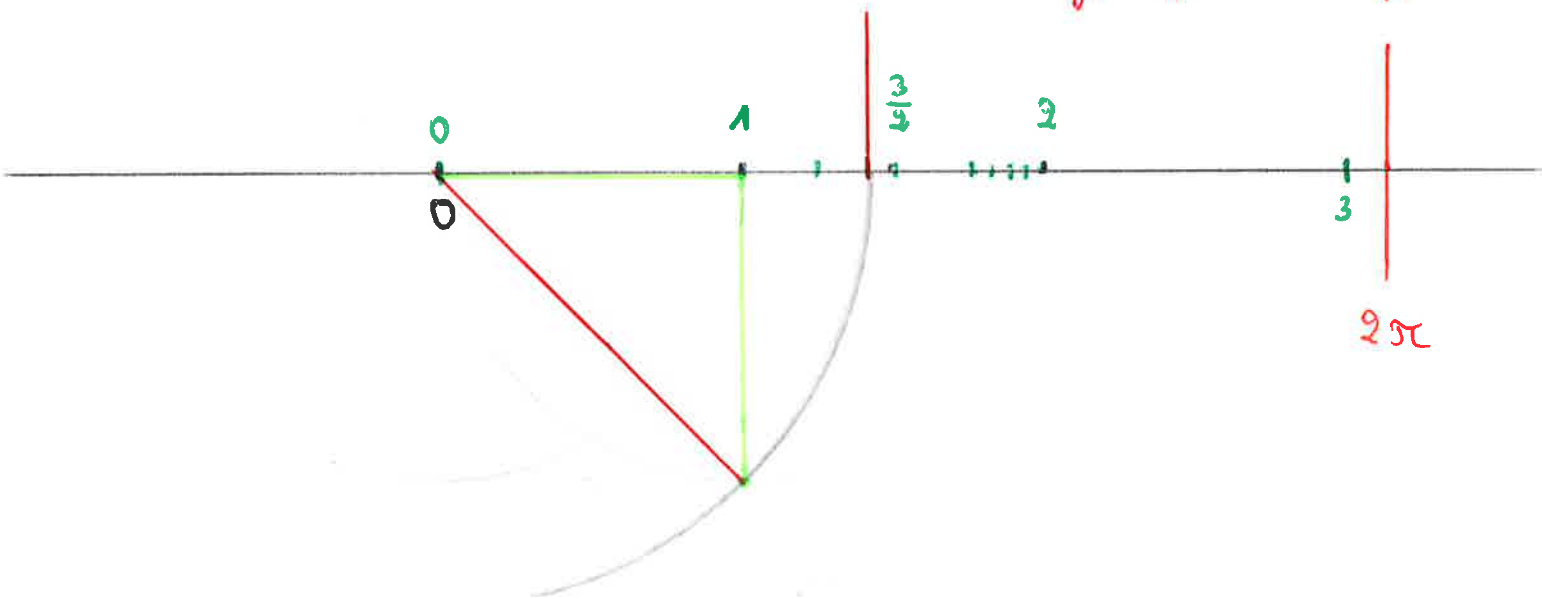
$$3, \ \frac{22}{7}, \dots$$

ou

$$3, \ \sqrt{10}, \dots \qquad \text{(Brahmagupta 628)}$$

ou Archimèdes





Donc il y a des trous !

Comment définir $\sqrt{2}$, π ..., comment remplir des trous ?

Définition. Soit X un ensemble. Une suite dans X est une fonction

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow X.$$

On écrit $a_n := a(n)$, $a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots$ ou $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (a_n).

Dans ~~la suite~~ ce qui suit K est un corps ordonné, Archimédien. On rappelle que $\mathbb{Q}$ est un? tel corps.

Définition 1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans K. On dit que la suite (a_n) est bornée s'il existe $b \in K$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |a_n| < b.$$

Proposition 1. (feuille de TD)

Proposition 1 Soient (a_n) et (b_n) des suites bornées dans K. Alors les suites $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n-b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.

en T.D.

On doit trouver la définition qui utilise seulement $\mathbb{Q}$ et telle définition que tous les trous se remplissent,

ou

que les suites comme

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29} \dots$$

ou

$$1, 1.4, 1.41, \dots$$

"touchent" quelque-chose (x t.q. $x^2 = 2$)

comme les suites

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots \frac{n+1}{n}, \dots$$

et

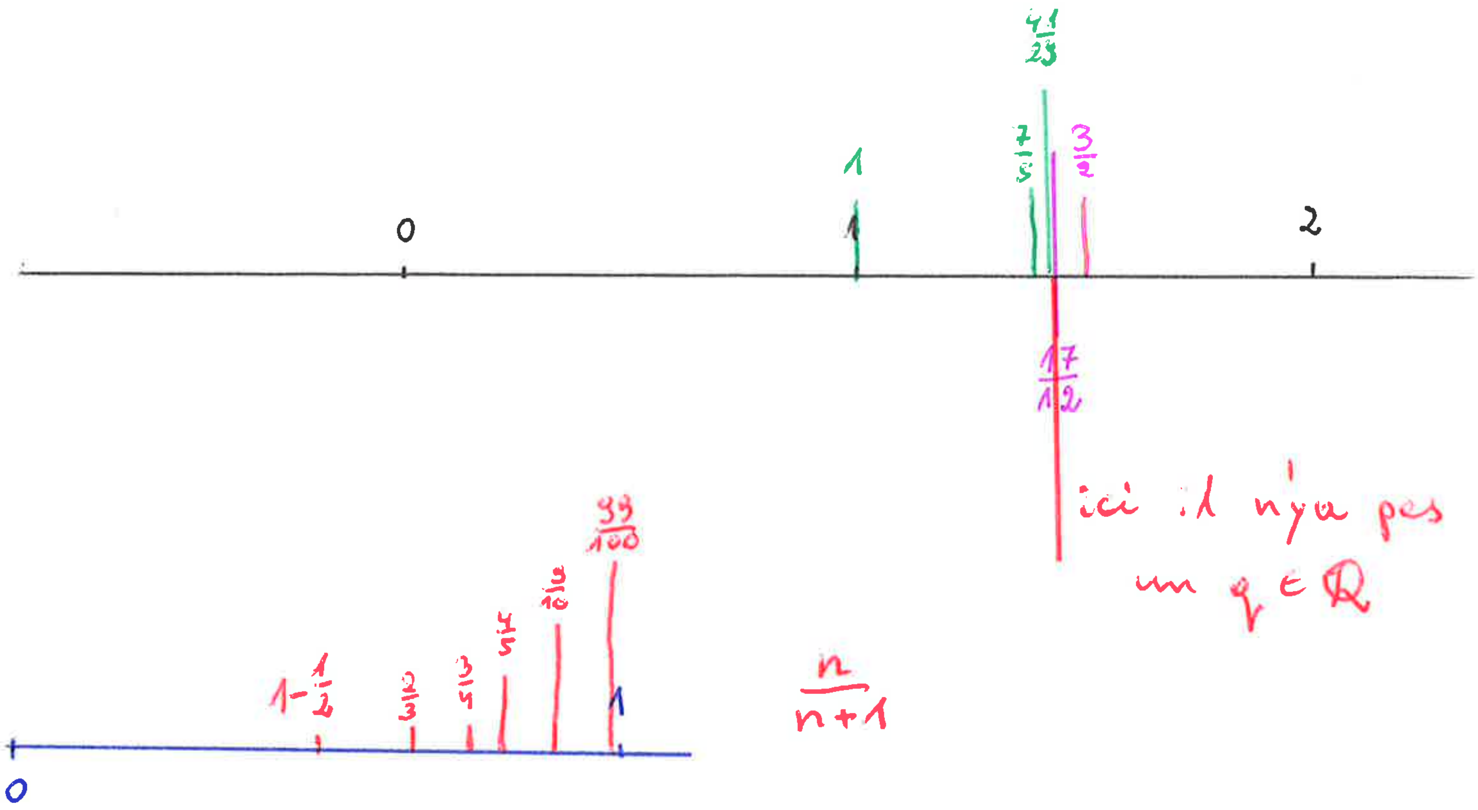
$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \quad \frac{n}{n+1}$$

"touchent" 1.

Trou correspondant à x, t.q. $x^2 = 2$

$$\{y \in \mathbb{Q} \mid y < 0 \text{ ou } y \geq 0 \text{ et } y^2 < 2\} \cup \{y \in \mathbb{Q} \mid y > 0 \text{ et } y^2 > 2\} =$$

$$= \mathbb{Q}$$



comment caractériser des suites dans $\mathbb{Q}$ qui doivent converger à un élément, mais cet élément on ne trouve pas dans $\mathbb{Q}$?

Trou :

$$\{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \text{ ou } (x \geqslant 0 \text{ et } x^2 < 2)\} \cup$$

$$\{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ et } x^2 > 2\}$$

Ici il n'y a pas trou !

$$\{x \in \mathbb{Q} \mid x < 1\} \cup \{1\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 1\}$$

Comment remplir des trous ?

(de limite d'une suite)

Définition 2. Soit (a_n) une suite dans K et soit $\alpha \in K$. On dit que la suite converge vers α et on écrit $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ si

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists M_n \in \mathbb{N}\ \forall m > M_n,\ |a_m - \alpha| < \frac{1}{n}.$$

On dit aussi que la suite (a_n) a limite α ou la suite (a_n) tend vers α $(a_n \to \alpha)$.

Exemple.

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,

b) soit $a_n = n$. La suite (a_n) n'a pas limite,

c) soit $a_n = \left(\frac{d_n}{s_n}\right)^2$ (de la Chapitre $\sqrt{2}$).

Alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

Proposition 2. Une suite dans K a au plus une limite dans K.

Preuve.

Supposons que une suite (a_n) a deux limites, donc

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ et $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha_1$ et

$(\alpha - \alpha_1 > 0$ ou $\alpha_1 - \alpha > 0)$, donc $0 < |\alpha - \alpha_1|$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $2n \in \mathbb{N}$. Donc

$\exists M_{2n} \quad \forall m > M_{2n}, \ |a_m - \alpha| < \frac{1}{2n}$. De même

$\exists \mathcal{M}_{2n} \quad \forall m > \mathcal{M}_{2n}, \ |a_m - \alpha_1| < \frac{1}{2n}$.

Alors

$$|\alpha - \alpha_1| = |\alpha - a_m + a_m - \alpha_1| \leq$$

$$|\alpha - a_m| + |a_m - \alpha_1| =$$

$$= |a_m - \alpha| + |a_m - \alpha_1| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{n}$$

pour $\forall \ m > \max(M_{2n}, \mathcal{M}_{2n})$.

Donc $\varepsilon = |\alpha - \alpha_1| > 0$ est tel que

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{n}$.

Donc $\varepsilon > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < n\varepsilon < 1$.

Mais K est Archimédien, donc c'est impossible. Donc $\alpha = \alpha_1$. ■

Proposition 3. T.D. Si $\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$ et $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ et si $c \in K$, alors

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta, \quad \lim_{n\to\infty} (c\, a_n) = c\, \alpha,$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n b_n = \alpha \beta.$$

Proposition 4 Soit (a_n) une suite dans K.
Si la suite (a_n) converge dans K alors la suite (a_n) est bornée.

Preuve. Soit $\alpha \in K$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

Alors $\exists\, M_1 \in \mathbb{N}, \forall\, m > M_1,\ |a_m - \alpha| < 1$.

Donc si $m > M_1$ alors

$$0 \leq a_m - \alpha < 1 \quad \text{ou} \quad 0 \leq -(a_m - \alpha) < 1.$$

Donc $$-1 + \alpha < a_m < 1 + \alpha.$$

Soit $A = \min(a_0, a_1, \dots, a_{M_1}, -1+\alpha)$ et
$B = \max(a_0, a_1, \dots, a_{M_1}, 1+\alpha)$.
Alors $\forall\, m \in \mathbb{N}$
$$A \leq a_m \leq B.$$

Donc

$$\underbrace{\mathrm{Min}(-(|A|+1), -(|B|+1))}_{-C} \leq A - 1 < a_m < B + 1 \leq \underbrace{\mathrm{Max}(|A|+1, |B|+1)}_{C}$$

Donc $\forall\, m \in \mathbb{N},\ |a_m| < C$.

Donc la suite (a_n) est borné. $\blacksquare$

Exemple. La suite $a_n = \frac{d_n}{s_n}$ (de le Chapitre $\sqrt{2}$) n'a pas limite dans $\mathbb{Q}$.

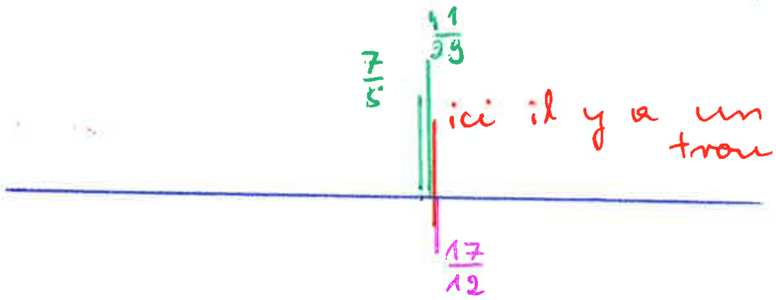
Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = q$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = q^2$, donc $q^2 = 2$ dans $\mathbb{Q}$. Mais c'est impossible donc la suite (a_n) n'a pas limite dans $\mathbb{Q}$.

Exemple. La suite $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ n'est pas bornée.

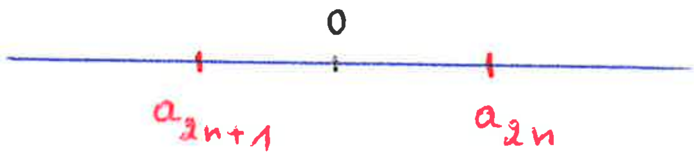
Exemple La suite $a_n = (-1)^n$ est bornée mais (a_n) ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

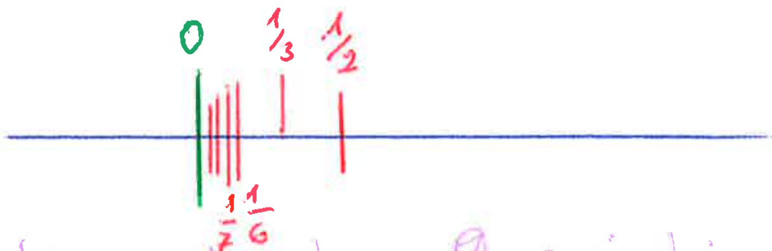
$$a_n = \frac{d_n}{s_n}$$



$$a_n = (-1)^n$$



$$a_n = \frac{1}{n}$$



Comment caractériser des suites dans $\mathbb{Q}$ qui doivent converger vers un élément mais cet élément ne se trouve pas dans $\mathbb{Q}$?

Proposition 5 Soit (a_n) une suite dans K.
Si la suite (a_n) converge dans K, alors $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists M_k \in \mathbb{N}$ $\forall m, p \in \mathbb{N}$, $m > M_k$ et $p > M_k$ $\Rightarrow |a_m - a_p| < \frac{1}{k}$

$(\forall k \in \mathbb{N}\ \exists M_k \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N},\ m > M_k$ et $p > M_k \Rightarrow |a_m - a_p| < \frac{1}{k})$.

Preuve.

Soit $\alpha := \lim_{n \to \infty} a_n$. On fixe $k \in \mathbb{N}$.

Alors $2k \in \mathbb{N}$. Comme $a_n \to \alpha$, alors

$\exists M_{2k} \in \mathbb{N}$ $\forall m > M_{2k}$, $|a_m - \alpha| < \frac{1}{2k}$.

~~Donc pour~~ Donc pour $m, p > M_{2k}$,
$|a_m - a_p| = |a_m - \alpha| + |\alpha - a_p| < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}$.

$\cancel{m > M_{2n} \quad -\frac{1}{2n} < a_m - \alpha < \frac{1}{2n} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2n} < \alpha - a_m < \frac{1}{2n}}$

On prend $M_k := M_{2k}$.

$\cancel{p > M_{2n} \quad -\frac{1}{2n} < \alpha - a_p < \frac{1}{2n} \quad -\frac{1}{2n} < a_p - a_m < \frac{1}{2n}}$

$\cancel{\text{Donc} \quad -\frac{1}{n} < a_m - a_p < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{n} < a_p - a_m < \frac{1}{n}}$

$\cancel{\text{Donc} \quad |a_m - a_p| < \frac{1}{n} \quad \text{si} \quad m > M_n := M_{2n}}$

$\cancel{\text{et} \quad p > M_n}$.

Définition 3. Soit (a_n) une suite dans K.
On dit que la suite (a_n) est une suite fondamentale ou une suite de Cauchy si
$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists M_n \in \mathbb{N}\ \forall m_1, m_2 \in \mathbb{N},\ m_1 > M_n$ et $m_2 > M_n$
$\Rightarrow |a_{m_1} - a_{m_2}| < \frac{1}{n}$.

Exemple. La suite $\frac{d_n}{s_n}$ (de la chapitre $\sqrt{2}$) est une suite de Cauchy.

Proposition 6. Soit (a_n) une suite de Cauchy dans K. Alors la suite (a_n) est bornée.

Preuve. en TD

Proposition 7. Soient (a_n) et (b_n) des suites de Cauchy dans K. Soit $c \in K$. Alors $(a_n \pm b_n)$ et $(a_n b_n)$ et (ca_n) sont des suites de Cauchy dans K.

$(a_n b_n)$ pour TD

Preuve. $|(a_{m_1} + b_{m_1}) - (a_{m_2} + b_{m_2})| \leq |a_{m_1} - a_{m_2}| + |b_{m_1} - b_{m_2}| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$

Donc les suites de Cauchy se comportent comme les suites convergentes mais elles n'ont pas necessairement une limite dans $\mathbb{Q}$.

On voudrait appeler la suite $\frac{d_n}{s_n}$ racine carrée de 2, mais il y a aussi des suites $\frac{d_{2n}}{s_{2n}}$ ou $\frac{d_{2n+1}}{s_{2n+1}}$ ou $1+\frac{1}{3}$, $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}$, $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}$, ... ou ...

De même

$$\frac{1+n}{n} \longrightarrow 1 \quad \text{et} \quad \frac{-1+n}{n} \longrightarrow 1$$

et $(1)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow 1$ (suite constante)

et beaucoup d'autres

Proposition 8. Soient (a_n) et (b_n) deux suites convergentes dans $\mathbb{K}$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ alors $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

Preuve. Soit x_0 la limite commune des suites (a_n) et (b_n). Soit $k\in\mathbb{N}$. Alors $2k\in\mathbb{N}$.
Comme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$, $\exists\, M'_{2k}\in\mathbb{N}$, $\forall\, m > M'_{2k}$, $|a_m - x_0| < \frac{1}{2k}$
De même $\exists\, M''_{2k}\in\mathbb{N}$, $\forall\, m > M''_{2k}$, $|b_m - x_0| < \frac{1}{2k}$.
Donc $\forall\, m > M_k := \max(M'_{2k}, M''_{2k})$ on a

C'est un corollaire de Proposition 3. *faire la preuve!*

$|(a_m - b_m) - 0| = |a_m - b_m| = |(a_m - x_0) - (b_m - x_0)| \leqslant |a_m - x_0| + |b_m - x_0|$
$< \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

On veut le même pour des suites dans $\mathbb{Q}$ qui doivent converger vers un élément, mais cet élément ne se trouve pas dans $\mathbb{Q}$, donc pour des suites de Cauchy.

Définition 4. Soient (a_n) et (b_n) deux suites de Cauchy (fondamentaux) dans K. On dit que la suite (a_n) est équivalente à (b_n) et on écrit $(a_n) \sim (b_n)$ si

$$\lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = 0.$$

Les suites de Cauchy équivalentes doivent representer (être égale) à le même élément dans $\mathbb{Q}$ avec les trous remplis. D'où ..

Soit SF_K l'ensemble de suites de Cauchy dans K.

Théorème 1. Soient $(a_n), (b_n) \in SF_K$. La relation $(a_n) \sim (b_n)$ est une relation d'équivalence dans SF_K.

Preuve.

1) $(a_n) \sim (a_n)$ car $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a_n) = 0$.

2) $(a_n) \sim (b_n)$ signifie $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} ((-1)(a_n - b_n)) = (-1) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$

par Proposition 3. Mais $(-1)(a_n - b_n) = b_n - a_n$.

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$, donc $(b_n) \sim (a_n)$.

3). $(a_n) \sim (b_n)$ et $(b_n) \sim (c_n)$ $\Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - c_n) = \lim_{n\to\infty} ((a_n - b_n) + (b_n - c_n)) =$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) + \lim_{n\to\infty} (b_n - c_n) \quad \text{par Proposition 3.}$$

$= 0 + 0 = 0$ donc $(a_n) \sim (c_n)$. ∎

Soit $a \in K$. On note $(a)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (a) une suite a_n telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n = a$.

Proposition 9. Soit (a_n) une suite dans K. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ dans K ssi $(a_n) \sim (a)$ dans K.

Pour T. D.

Proposition 10. Soient (a_n), (b_n), (α_n), (β_n), ~~(Γ_n) et (Θ_n)~~ des suites de Cauchy dans K.

Si $(a_n) \sim (\alpha_n)$ et $(b_n) \sim (\beta_n)$

alors $(a_n \pm b_n) \sim (\alpha_n \pm \beta_n)$ et

$$(a_n b_n) \sim (\alpha_n \beta_n).$$

Preuve.

$(a_n) \sim (\alpha_n) \iff \lim(a_n - \alpha_n) = 0$

et aussi $\lim(b_n - \beta_n) = 0$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} \left((a_n + b_n) - (\alpha_n + \beta_n) \right) = \lim_{n\to\infty} \left((a_n - \alpha_n) + (b_n - \beta_n) \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (a_n - \alpha_n) + \lim_{n\to\infty} (b_n - \beta_n) = 0 + 0 = 0.$$ Donc

$(a_n + b_n) \sim (\alpha_n + \beta_n)$.

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n - \alpha_n \beta_n) = \lim (a_n b_n - a_n \beta_n + a_n \beta_n - \alpha_n \beta_n) =$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n - a_n \beta_n) + \lim_{n\to\infty} (a_n \beta_n - \alpha_n \beta_n)$$

$\lim_{n\to\infty} a_n(b_n - \beta_n) \overset{?}{=}$ La suite (a_n) est Cauchy

donc bornée $\exists_K \forall n$, $|a_n| < K$. On ~~choisi~~ fixe $m \in \mathbb{N}$ $|a_n(b_n - \beta_n) - 0| \leq$

$|a_n|\,|b_n - \beta_n| \leq K\,|b_n - \beta_n| < K \cdot \frac{1}{k_0} < \frac{1}{m}$ pour $n > N_{k_0}$

Je prend $k_0 > mK$.

$k_0 > mK \Rightarrow |a_n(b_n - \beta_n)| < \frac{1}{m}$ pour $n > N_{k_0}$.

Définition 5 (Définition de $\mathbb{R}$)

On pose

$$\mathbb{R} := SF_{\mathbb{Q}} / \sim \quad - \text{ l'ensemble}$$

de classes d'équivalence suivant la relation $\sim$. On note $\overline{(a_n)}$ la classe d'équivalence de la suite (a_n). On définie

$$\overline{(a_n)} +_{\mathbb{R}} \overline{(b_n)} := \overline{(a_n + b_n)}$$

et

$$\overline{(a_n)} \cdot_{\mathbb{R}} \overline{(b_n)} := \overline{(a_n b_n)}.$$

Proposition 11. La somme $+_\sim$ et le produit $\cdot_\sim$ ne dependent pas de choix des répresentants dans des classes d'équivalences. Donc $+_{\mathbb{R}}$ et $\cdot_{\mathbb{R}}$ sont des fonctions de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit souvent (dans cette situation) que $+_\sim$ et $\cdot_\sim$ sont bien définies.

Preuve. c'est un corollaire du Proposition 10.

Théorème 2. $(\mathbb{R}, +_\sim, \cdot_\sim)$ est un corps ordonné, Archimédien.

Preuve :

On pose $0_{\mathbb{R}} := \overline{(0)}$ et $1_{\mathbb{R}} := \overline{(1)}$.

On vérifie les axiomes $+_1 \dots +_4$, $\times_1 \dots \times_4$ et (d) de la définition d'un corps (chapitre $\mathbb{Q}$, la première définition). Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$+_1$ $\quad a +_\sim b = b +_\sim a$

Soient $(a_n) \in a$, $(b_n) \in b$. Alors

$$a +_\sim b := \overline{(a_n + b_n)} = \overline{(b_n + a_n)} = \overline{(b_n)} +_\sim \overline{(a_n)} = b +_\sim a.$$

$+_2$

Soient $(a_n) \in a$, $(b_n) \in b$ et $(c_n) \in c$.

Alors $a +_\sim b = \overline{(a_n + b_n)}$, $b +_\sim c = \overline{(b_n + c_n)}$.

Donc $(a +_\sim b) +_\sim c = \overline{(a_n + b_n)} +_\sim \overline{(c_n)} = \overline{((a_n + b_n) + c_n)}$.

parenthèse dans $\mathbb{R}$

parenthèse dans $\mathbb{Q}$

$$a \underset{\sim}{+} (b \underset{\sim}{+} c) = \overline{(a_n)} \underset{\sim}{+} \overline{(b_n + c_n)} = \overline{(a_n + (b_n + c_n))}$$

Mais $\quad (a_n + b_n) + c_n = a_n + (b_n + c_n)$

parenthèses dans $\mathbb{Q}$

Donc $\quad (a \underset{\sim}{+} b) \underset{\sim}{+} c = a \underset{\sim}{+} (b \underset{\sim}{+} c)$

parenthèses dans $\mathbb{R}$

$+_3$

$$a \underset{\sim}{+} 0_{\mathbb{R}} = \overline{(a_n)} \underset{\sim}{+} \overline{(0)} = \overline{(a_n + 0)} =$$

$\overline{(a_n)} = a \quad$ car $\quad a_n + 0 = a_n$ dans $\mathbb{Q}$.

$+_4$

(a_n) est une suite de Cauchy, donc $(-a_n)$ est une suite de Cauchy. On a donc

$$a \underset{\sim}{+} \overline{(-a_n)} = \overline{(a_n)} \underset{\sim}{+} \overline{(-a_n)} =$$

$$\overline{(a_n + (-a_n))} = \overline{(0)} = 0_{\mathbb{R}}.$$

parenthèse dans $\mathbb{Q}$

On note $\underset{\sim}{-} a := \overline{(-a_n)}$

$\times_1$ $\times_2$ $\times_3$ et (d) sont faciles donc pour TD

Il reste $\times_4$

X_4 Si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0_{\mathbb{R}}$ alors $\exists\, x \in \mathbb{R}$,

$$a \cdot x = 1_{\mathbb{R}}.$$

Soit $(a_n) \in a$. Alors $a = 0_{\mathbb{R}}$ ssi $(a_n) \sim (0)$

ssi $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ ssi

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists M_n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N},\ m \geqslant M_n \Rightarrow |a_m| < \frac{1}{n}$$

(on peut $\geqslant$)

Donc $\overline{(a_n)} = a \neq 0_{\mathbb{R}}$ ssi

$*$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists K_m \in \mathbb{N},\ K_m > m$ et $|a_{K_m}| \geqslant \frac{1}{n_0}$

De plus (a_n) est Cauchy donc

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists C_k \in \mathbb{N}\ \forall p, q \in \mathbb{N},\ p, q > C_k \Rightarrow |a_p - a_q| < \frac{1}{k}$$

De $*$ pour $m = C_{4n_0}$ $\exists \underset{\underset{K_{C_{4n_0}}}{\parallel}}{K} \in \mathbb{N}$, $K > C_{4n_0}$ et $|a_K| \geqslant \frac{1}{n_0}$.

Donc $\forall m > C_{4n_0}$,

$$|a_m| \geqslant |a_K| - |a_K - a_m| > \frac{1}{n_0} - \frac{1}{4n_0} = \frac{3}{4n_0} > \frac{1}{n_0}.$$

$\left(a_K = a_m + a_K - a_m \Rightarrow |a_K| \leqslant |a_m| + |a_K - a_m| \right)$

-1.5

Lemme 1. Si $\overline{(a_n)} \neq 0_R$ alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\exists C \in \mathbb{N}$ $\forall m \in \mathbb{N}$, $m > C \Rightarrow |a_m| > \frac{1}{n_0}$.

Corollaire 1. Si $\overline{(a_n)} \neq 0_{\mathbb{R}}$ alors

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\exists C \in \mathbb{N}$ $\forall m \in \mathbb{N}$, $m > C \Rightarrow a_m > \frac{1}{n_0}$

ou (~~exclusive~~) (~~et~~)

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\exists C \in \mathbb{N}$ $\forall m \in \mathbb{N}$, $m > C \Rightarrow -a_m > \frac{1}{n_0}$.

$(a_n) \in a \neq 0_{\mathbb{R}}$

$\exists n_0 \; \exists C \; \forall n \,, \; n > C \Rightarrow |a_n| > \frac{1}{n_0}$

On pose $x_n := 1$ pour $n \leq C$

$x_n := \frac{1}{a_n}$ pour $n > C$.

Lemme 2. La suite (x_n) est Cauchy.

Preuve.

Pour $p, q > C$ on a

$$|x_p - x_q| = \left|\frac{1}{a_p} - \frac{1}{a_q}\right| = \left|\frac{a_q - a_p}{a_p a_q}\right| < \frac{|a_q - a_p| \cdot n_0^2}{}$$

~~La suite (a_n) est Cauchy.~~

On choisi $k \in \mathbb{N}$. Alors $k n_0^2 \in \mathbb{N}$.

La suite (a_n) est Cauchy.

Donc $\exists\, M \;; \forall p, q > M \Rightarrow |a_p - a_q| < \frac{1}{k n_0^2}$.

Donc pour $p, q > \overset{\max(M, C)}{M + C}$

$|x_p - x_q| < \frac{1}{k n_0^2} \cdot n_0^2 = \frac{1}{k}$. Donc (x_n) est

Cauchy.

Preuve de $\times_4$

$a \cdot_{\mathbb{R}} \overline{(x_n)} = \overline{(a_n)} \cdot_{\mathbb{R}} \overline{(x_n)} = \overline{(a_n \cdot x_n)} =$

$= \overline{(1)}$ car $\lim\limits_{n \to \infty} a_n x_n = 1$.

on pour $n > C$ $|a_n \cdot x_n - 1| = |a_n \frac{1}{a_n} - 1| = |1 - 1| = 0$.

Donc on a montré que $\mathbb{R}$ est un corps.

L'ordre dans $\mathbb{R}$

L'exemple qui cause de problème

$a_n = \frac{1}{n}$. Alors $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_n > 0$ mais

$\overline{(a_n)} = 0_{\mathbb{R}}$.

Définition 6. Soit (a_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$. On dit que (a_n) est **positive** s'il existe $e \in \mathbb{Q}$, $e > 0$ et s'il existe $K \in \mathbb{N}$ tels que $\forall m \in \mathbb{N}$, $m > K \Rightarrow a_m > e$.

Lemme 3. Soit (a_n) et (b_n) des suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$. Si $(a_n) \sim (b_n)$ et (a_n) positive alors (b_n) est positive.

Preuve

(a_n) est positive donc

$* \exists K, \forall m \in \mathbb{N}$, $m > K \Rightarrow a_m > e$.

$e > 0$, $e \in \mathbb{Q} \Rightarrow e = \frac{p}{q}$ $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $(p,q) = 1$

$(a_n) \sim (b_n) \iff \lim\limits_{n \to \infty} (a_n - b_n) = 0 \iff$

$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \ \exists M_n \in \mathbb{N} \ \forall m \in \mathbb{N} , m > M_n \Rightarrow |a_m - b_m| < \frac{1}{n}$.

Donc pour $n_0 = 2q$ $\exists M_{2q} \in \mathbb{N}$,

$*_2$ $\forall m \in \mathbb{N}$, $m > M_{2q} \Rightarrow |a_m - b_m| < \frac{1}{2q}$

Donc pour $m > K + M_{2q}$

on a de $*_1$ et de $*_2$

$b_m = a_m + (b_m - a_m) > e + (b_m - a_m) > \frac{p}{q} - \frac{1}{2q} = \frac{2p-1}{2q} > 0$

$\square$

Donc (b_m) est positive.

<u>Définition de l'ordre dans $\mathbb{R}$.</u>

Soit $a \in \mathbb{R}$. On définie

$$a >_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}}$$

si $\exists (a_n) \in a$, telle que (a_n) est une suite positive.

<u>Remarque</u>. Lemme 3 implique alors que $\forall (a_n) \in a$, (a_n) est une suite positive.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On définie

$a \underset{R}{>} b$ ssi $a \underset{R}{-} b = a +_{R} (-b) \underset{R}{>} 0_{\mathbb{R}}$.

Lemme 4. La relation $a \underset{R}{>} b$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, donc $\mathbb{R}$ est un corps ordonné.

Preuve.

On doit vérifier le définition (deuxième du chapitre ⓑ).

Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $a \neq 0_{\mathbb{R}}$ alors Corollaire 1 implique,

$(a_n) \in a$ alors (a_n) une suite positive ou (exclusive) $(-a_n)$ une suite positive

donc $a \underset{\sim}{>} 0_R$ ou (exclusive) $-a \underset{\sim}{>} 0_{\mathbb{R}}$.

Donc si $a \in \mathbb{R}$, exactement une et seulement une de propositions suivantes est vraie

$a = 0_{\mathbb{R}}$

ou

$a \underset{\sim}{>} 0_{\mathbb{R}}$

ou

$-a \underset{\sim}{>} 0_{\mathbb{R}}$.

Donc si $a, b \in \mathbb{R}$ exactement une et seulement une de prop. suivantes est vraie

$$a = b \quad \text{ou} \quad a - b \underset{\sim}{>} 0_{\mathbb{R}} \quad \text{ou} \quad -(a-b) \underset{\sim}{>} 0_R$$

donc point 1 de la définition est vérifiée.

Montrons que la relation $\underset{\sim}{>}$ est transitive.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ $a \underset{\sim}{>} b$ et $b \underset{\sim}{>} c$.

Soient $(a_n) \in a$, $(b_n) \in b$, $(c_n) \in c$.

$$\exists\, e_1 > 0 \ \exists\, K_1 \in \mathbb{N} \ \forall m, \ m > K_1 \Rightarrow a_m - b_m > e_1$$

$$\exists\, e_2 > 0 \ \exists\, K_2 \in \mathbb{N} \ \forall m, \ m > K_2 \Rightarrow b_m - c_m > e_2$$

Donc

$$\forall m \in \mathbb{N}, \ m > \overset{(\max(K_1,K_2))}{K_1 + K_2} \Rightarrow \underbrace{a_m - b_m + b_m - c_m}_{a_m - c_m} > e_1 + e_2$$

Donc $(a_m - c_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite positive

donc $a - c \underset{\sim}{>} 0_R \Rightarrow a \underset{\sim}{>} c$.

Pour TD

$$a \underset{\sim}{>} b \Rightarrow a + c \underset{\sim}{>} b + c$$

et

$$a \underset{\sim}{>} b \text{ et } c \underset{\sim}{>} 0_R \Rightarrow ac \underset{\sim}{>} bc.$$

Donc $\mathbb{R}$ est un corps ordonné.

Il reste à montrer que $\mathbb{R}$ est un corps Archimédien.

Rappel Soit K un corps ordonné. On dit que K est un corps Archimédien si :

$$\forall a \in K \text{ et } a>0, \exists n \in \mathbb{N}, \underbrace{a+a+\ \ +a}_{n \text{ fois}} > 1$$

$\Leftrightarrow$

$$\forall a \in K, b \in K, a>0, b>0 \ \exists n \in \mathbb{N} \ \overset{a+\ldots+a}{\overset{\shortparallel}{na}} > b$$

$\Leftrightarrow$

$$\forall a, b \in K, a>0, b>0 \ \exists n \in \mathbb{N}_K^{*} \quad a > \frac{b}{n}$$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $a \gtrsim 0_{\mathbb{R}}$.

Si $(a_n) \in a$, alors (a_n) est une suite positive. Donc

$\exists\ e \in \mathbb{Q}, e>0, \exists K \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall m > K, \quad a_n > e.$$

$e \in \mathbb{Q}, e>0 \Rightarrow e = \frac{p}{q}, \ p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, (p,q)=1$

$1_{\mathbb{R}} = \overline{(1)}$, (1) suite constante

$(2q\, a_n)$ – suite de Cauchy

$$\overline{(2q a_n)} = \underbrace{\overline{(a_n)} + \dots + \overline{(a_n)}}_{2q\text{-fois}}$$

Pour $m > K$

$$2q a_n - 1 > 2q \frac{p}{q} - 1 = 2p - 1 > 0$$

Donc $\overline{(2q a_n - 1)} \gtrsim 0_{\mathbb{R}}$

$\overline{(2q a_n)} > 1_{\mathbb{R}}$ donc

$$\underbrace{\overline{(a_n)} + \dots \overline{(a_n)}}_{2q \text{ fois}} > 1_{\mathbb{R}} .$$

Donc la preuve de Th. 2 est terminé.

On a vue en TD que la suite $\left(\frac{d_n}{s_n}\right)$ est Cauchy et que $\left(\frac{d_n^2}{s_n^2}\right) \to 2$

Donc dans notre $\mathbb{R}$, $\overline{\left(\frac{d_n^2}{s_n^2}\right)} = \overline{(2)}$

et $\overline{\left(\frac{d_n}{s_n}\right)} \in \mathbb{R}$, $\overline{\left(\frac{d_n}{s_n}\right)}^2 = \overline{(2)}$, donc on peut appeler $\sqrt{2} := \overline{\left(\frac{d_n}{s_n}\right)}$.

$\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$

Quelle est la relation entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$?

$$(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, >)$$

$$(\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}}, >_{\mathbb{R}})$$

$\overline{(1)} = 1_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$ $\quad$ $n_{\mathbb{R}} := \underbrace{1_{\mathbb{R}} + \quad + 1_{\mathbb{R}}}_{n\text{-fois}}$ $\quad$ $\sqrt{2} := \overline{\left(\frac{d_n}{s_n}\right)}$

$\mathbb{N}_{\mathbb{R}}, \mathbb{Z}_{\mathbb{R}}, \quad \mathbb{Q}_{\mathbb{R}} := \left\{ \frac{n_{\mathbb{R}}}{m_{\mathbb{R}}} \mid \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}, m \neq 0 \right\} \subsetneq \mathbb{R}$

$\left(\frac{d_n}{s_n}\right)^2 \to 2$

<u>Théorème 3.</u> L'application

$i : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ définie par

$i(\alpha) := \overline{(\alpha)}$ où (α) la suite constante

est un morphisme de corps ordonnés c'est-à-dire

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$,

$$i(\alpha + \beta) = i(\alpha) +_{\mathbb{R}} i(\beta)$$

$$i(0) = 0_{\mathbb{R}}$$

$$i(\alpha \cdot \beta) = i(\alpha) \cdot_{\mathbb{R}} i(\beta)$$

$$\iota(1) = 1_{\mathbb{R}} \ ,$$

$$\alpha < \beta \implies \iota(\alpha) <_{R} \iota(\beta) .$$

Preuve :

$$\iota(\alpha) = \overline{(\alpha)} \qquad \iota(\beta) = \overline{(\beta)}$$

$$\iota(\alpha+\beta) = \overline{(\alpha+\beta)} = \overline{(\alpha)} +_{R} \overline{(\beta)} = \iota(\alpha) +_{R} \iota(\beta).$$

Étant un morphisme de corps, ι est injective donc on identifie $\mathbb{Q}$ avec son image $\iota(\mathbb{Q})$ dans $\mathbb{R}$.

L'addition dans $\mathbb{R}$ et la multiplication dans R on note donc $+$ et $\cdot$.

Dans la preuve de Proposition 12 on note $>_{R}$ la dernière fois.

On définie

$$\mathbb{R} := SF_{\mathbb{Q}} / \sim$$

l'ensemble des classes d'équivalence.

(a_n) - suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$,

$\overline{(a_n)}$ - la classe d'équivalence de (a_n).

$\overline{(a_n)} \in \mathbb{R}$.

On a montré que $\mathbb{R}$ est un corps ordonné Archimédien et que l'application

$$\iota : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R} \,, \quad \alpha \longmapsto \overline{(\alpha)}$$

— classe d'équivalence de la suite constante (α),

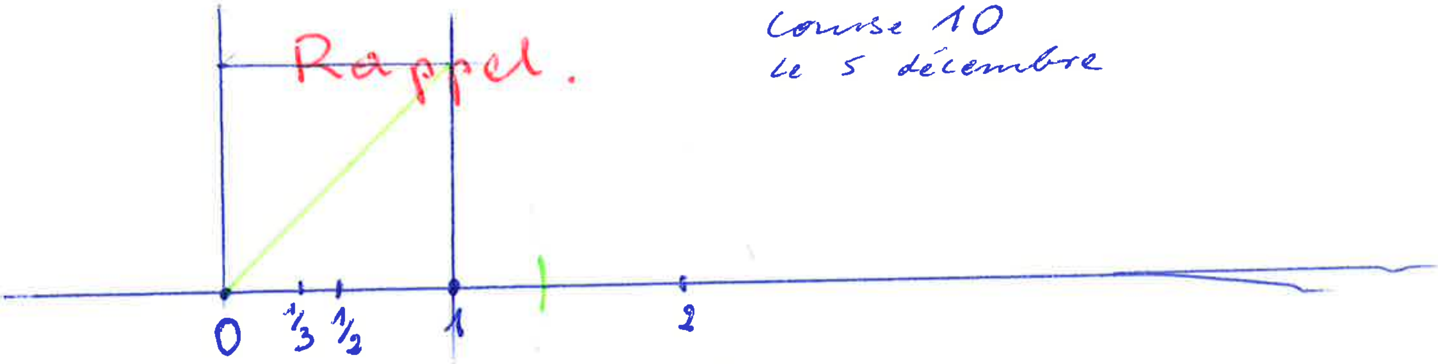
est un morphisme des corps ordonnés, en particulier $\iota : \mathbb{Q} \to \iota(\mathbb{Q})$ est un isomorphisme des corps ordonnés.

Remarque. Dans $\mathbb{R}$

$$\overline{\left(\frac{d_n}{s_n}\right)}^2 = \overline{\left(\frac{d_n^2}{s_n^2}\right)} = 2 \,.$$

Course 10
le 5 décembre

Rappel.



$$\frac{d_n^2}{s_n^2} \longrightarrow 2$$

mais $\frac{d_n}{s_n}$ n'a pas limite dans $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{Q}$ corps ordonné Archimédien.

Il y a des „trous" dans $\mathbb{Q}$.

Soit $S\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}$ l'ensemble des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.

$$(a_n) \sim (b_n) \iff \lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = 0$$

est une relation d'équivalence dans $S\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}$.

Proposition 12. Dire avant ce qu'on a fait !

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(a_n) \in a$. Alors la suite $\left(\iota(a_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ converge dans $\mathbb{R}$

et
$$\lim_{n\to\infty} \iota(a_n) = a.$$

Preuve.

notation

$$\iota : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \iota(q) := \overline{\underbrace{(q)}_{\text{suite constante, dont chaque terme égale } q}}_{n\in\mathbb{N}} = q_{\mathbb{R}}$$

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ *, $\frac{1}{n_0}{}_{\mathbb{R}} \in \mathbb{Q}_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}$.

$(a_n) \in a$, donc (a_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.

$4n_0 \in \mathbb{N}$, donc * $\exists M_{4n_0} \in \mathbb{N}$, $\forall n, m > M_{4n_0}$,

$|a_m - a_n| < \frac{1}{4n_0}$.

Donc $\forall n, m > M$, $\frac{1}{2n_0} - |a_m - a_n| > \frac{1}{4n_0}$.

Pour chaque $n > M_{4n_0}$ considérons la suite (y_m) dans $\mathbb{Q}$, donc on fixe $n > M_{4n_0}$

$$(y_m) = \left(\frac{1}{2n_0} - |a_m - a_n|\right)_{m \in \mathbb{N}}.$$

La suite $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est Cauchy et elle est positive car $y_m > \frac{1}{4n_0}$ pour $m > M_{4n_0}$. Donc

$$\overline{(y_m)} = \overline{\left(\frac{1}{2n_0} - |a_m - a_n|\right)_m} >_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}} \quad \text{dans } \mathbb{R}$$

donc

$$\overline{\left(\frac{1}{2n_0}\right)} -_{\mathbb{R}} \overline{(|a_m - a_n|)_m} >_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}}$$

suite constante

Mais alors pour $\forall n > M_{4n_0}$,

$$|a - \imath(a_n)|_{\mathbb{R}} = |a - \overset{\imath(a_n)}{\dot{a}_n}{}_{\mathbb{R}}|_{\mathbb{R}} =$$

$$= \left|\overline{(a_m)_m} - \overline{(a_n)_m}\right|_{\mathbb{R}} = \left|\overline{(a_m - a_n)_m}\right|_{\mathbb{R}} =$$

suite constante dans $\mathbb{Q}$ égale a_n

ex. 15 de la feuille 5

$$= \overline{(|a_m - a_n|)_m} <_{\mathbb{R}} \underset{\imath\left(\frac{1}{2n_0}\right)}{\frac{1}{2n_0}}{}_{\mathbb{R}} <_{\mathbb{R}} \underset{\imath\left(\frac{1}{n_0}\right)}{\frac{1}{n_0}}{}_{\mathbb{R}}.$$

suite dans $\mathbb{Q}$ valeur absolue dans $\mathbb{Q}$

Donc $\forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists M_{4n_0} \in \mathbb{N}\ \forall n > M$

$$\left\| a - \overset{i(a_n)}{\overset{\shortparallel}{a_{n_{\mathbb{R}}}}} \right\|_{\mathbb{R}} \underset{\mathbb{R}}{<} \frac{1}{n_0}_{\mathbb{R}}^{= i(\frac{1}{n_0})}$$

donc $a_{n_{\mathbb{R}}} = i(a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ ■

on identifie $\mathbb{Q}$ avec $i(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}_{\mathbb{R}}$

Théorème 4. $\mathbb{Q}$ est un sous-ensemble dense de $\mathbb{R}$ c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in \mathbb{R} \ \exists a \in \mathbb{Q}, \ |x-a| < \frac{1}{n}.$$

Preuve.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Alors $x = \overline{(x_n)}$, (x_n) suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.

Alors $(i(x_n))$ une suite dans $\mathbb{R}$, telle que $\lim_{n\to\infty} i(x_n) = x$ (Prop. 12). Donc

$\exists K_n \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $m > K_n \Rightarrow |x - i(x_m)|_{\mathbb{R}} < i(\frac{1}{n})$.

Soit $m_0 > K_n$ et $a := i(x_{m_0})$.

Alors $a \in \mathbb{Q}$ $i(\mathbb{Q})$ et $|x-a|_{\mathbb{R}} \underset{\mathbb{R}}{<} \frac{1}{n}$. ■

THÉORÈME 5. $\mathbb{R}$ est un corps complet c'est-à-dire chaque suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ a une limite dans $\mathbb{R}$.

Preuve.

Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Théorème 4 implique que pour $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists a_n \in \mathbb{Q}$ $(\mathbb{Q} \subset \mathbb{R})$ tel que

$$|x_n - a_n| < \frac{1}{n}.$$

La suite (a_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ car

$|a_p - a_q| = |a_p - x_p + x_p - x_q + x_q - a_q| \leq$

$|a_p - x_p| + |x_p - x_q| + |x_q - a_q|$

$|a_p - x_p| < \frac{1}{3n}$ pour $p > 3n$,

$|x_p - x_q| < \frac{1}{3n}$ pour $p, q > M_{3n}$ car (x_n) suite de Cauchy,

$|x_q - a_q| < \frac{1}{3n}$ pour $q > 3n$

Donc pour $p, q > 3n + M_{3n}$,

$$|a_p - a_q| < \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n} = \frac{1}{n}$$

Donc (a_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.

Rappel :

Le resultat principal du dernier cours

Théorème 5. $\mathbb{R}$ est un corps complet c'est-à-dire chaque suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ a une limite dans $\mathbb{R}$. ■

Donc per la définition

$$a := \overline{(a_n)} \in \mathbb{R}.$$

Montrons que x_n tend vers a.

Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Alors

$|x_m - a| = |x_m - a_m + a_m - a| \leqslant$

$|x_m - a_m| + |a_m - a|$.

Proposition 12 implique $|a_m - a| < \frac{1}{2n}$ pour $m > M_{2n}$ car $(a_m) \to a$ dans $\mathbb{R}$. $|x_m - a_m| < \frac{1}{2n}$ pour $m > 2n$. Donc pour $m > M_{2n} + 2n$ on a

$$|x_m - a| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}.$$

Donc (x_m) converge vers a dans $\mathbb{R}$. $\square$

<u>Définition</u> Soit X une partie de $\mathbb{R}$:) On dit que X est mejorée si

$$\exists\, M \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in X,\ x \leqslant M.$$

L' élément M on appelle alors un mejorant de X.

ii) On dit que $m \in X$ est un plus grand élément de X si

$$\forall x \in X, \ x \leq m.$$

Un plus grand élément de X, s'il existe, il est unique. On le note $\max(X)$.

iii) Un élément $S \in \mathbb{R}$ s'appelle une borne supérieure de X si S est un majorant de X et si pour chaque majorant M de X on a

$$S \leq M.$$

Une borne supérieur de X, s'il existe, elle est unique et on le note $\sup X$.

Les définition d'une partie minorée, minorant, un plus petit élément, $\min(X)$ une borne inférieure, $\inf(X)$ sont obligatoires pour l'examen.

Exemple

$X =]0,1[:= \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \}$

Alors 2 et 3 sont des majorant de X.

X ne possède pas un élément plus grand car si $m \in X$ alors $0 < m < \frac{m+1}{2} < 1$, donc $\frac{m+1}{2} \in X$.

L'élément 1 est $\sup X$ car

$\forall x \in X$, $x \leq 1$ donc 1 est un majorant de X.

Si λ un majorant et $\lambda < 1$ alors $\lambda < \frac{\lambda+1}{2} < 1$ donc $\frac{\lambda+1}{2} \in X$ donc λ n'est pas majorant. Don $\Rightarrow 1 \leq \lambda$.

Théorème 6. Soit X une partie non-vide, majorée de $\mathbb{R}$. Alor la borne supérieure de X existe,

c'est-à-dire $\exists\, S \in \mathbb{R} \Big((\forall x \in X,\ x \leq S)$ et $\big(\forall M \in \mathbb{R}, (\forall x \in X, x \leq M \Rightarrow S \leq M)\big)\Big)$

Preuve.

Soit $x_0 \in X$ et M un majorant de X.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $\exists\, m_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$m_0 \cdot \frac{1}{n} > \quad - x_0 \quad \text{car } \mathbb{R} \text{ est Archimédien.}$$

donc

$$x_0 + m_0 \frac{1}{n} > M.$$

L'ensemble

$$B_n := \left\{ m \in \mathbb{N} \;\middle|\; x_0 + m\frac{1}{n} \text{ un majorant de } X \right\}$$

est un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{N}$, donc B_n possède un élément plus petit $m_n \in \mathbb{N}$. Alors

$$y_n := x_0 + \frac{m_n}{n} \quad \text{est un majorant de } X,$$

$\exists\, x_n \in X,$

$$z_n := \underbrace{y_n - \frac{1}{n} = x_0 + \frac{m_n - 1}{n}}_{\text{n'est pas un majorant}} < x_n. \ \text{~~pour certain } x \in X~~.$$

On a

$$z_m < y_n \quad \text{pour } \forall\, m, n \in \mathbb{N}.$$

car chaque y_n est un majorant de X et $z_m < x_m \in X$.

Donc

$$z_m - z_n < y_n - z_n = \frac{1}{n}.$$

Donc

$$|z_m - z_n| = \max\{z_m - z_n, z_n - z_m\} \leq \max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\}$$

(z_n) est donc une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Théorème 5 implique que

$$a := \lim_{n\to\infty} z_n \quad \text{existe dans } \mathbb{R}.$$

Montrons que a est un majorant de X

Supposons que ce n'est pas vraie.

Donc $\exists\, x_0 \in X$, $a < x_0$.

Donc $\exists\, n \in \mathbb{N}$, tel que

$$\frac{1}{n} < \frac{x_0 - a}{2}$$

car $\mathbb{R}$ est Archimédien.

et alors

$$z_m - a \leq \underbrace{|z_m - a| < \frac{1}{n}}_{\text{pour } m > M_n \text{ car } z_m \to a.} < \frac{x_0 - a}{2} \quad \text{pour } m > M_n.$$

~~$m > \max(M_0, n)$~~

Alors

$$y_m = z_m + \frac{1}{m} < a + \frac{x_0 - a}{2} + \underbrace{\frac{1}{m} < a + \frac{x_0 - a}{2} + \frac{1}{n}}_{\text{pour } m > M_n,\ \text{et } m > n.} <$$

$$< a + \frac{x_0 - a}{2} + \frac{x_0 - a}{2} = x_0, \quad \text{mais c'est impossible}$$

car y_m est un majorant de X, donc

a est aussi un majorant de X.

Montrons que $a = \sup X$.

Si c'est fausse alors $\exists$ un majorant

c de X tel que $c < a$.

Alors $\exists\, n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{n} < a - c$, car $\mathbb{R}$ Archimédien.

Donc $a - c > 0$. Alors

$$a - z_m \leq |a - z_m| < \frac{1}{n} < a - c$$ pour

$m > M_n$. Donc

$$a - z_m < a - c,$$ donc

$$c < z_m < x_m$$ pour certain $x_m \in X$

par $*$.

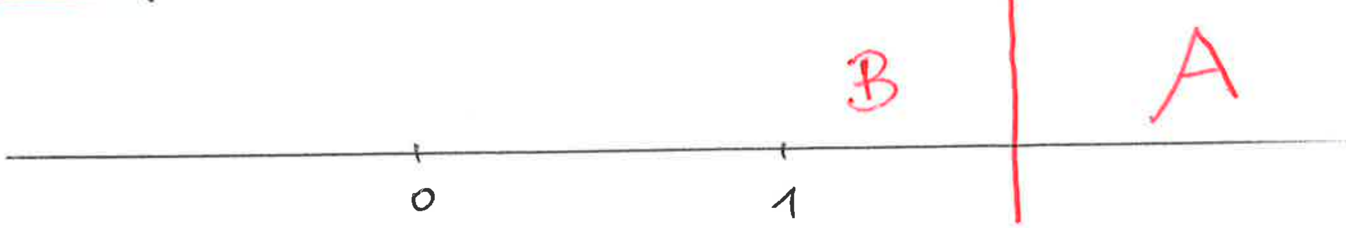
Mais c'est impossible car c est

un majorant, donc $a \leq c$, Donc

$$a = \sup X.$$

D'autres définition de $\mathbb{R}$

2. Coupures de Dedekind.



$$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2 \text{ et } x \geqslant 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$$

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2 \text{ et } x > 0\}$$ – une coupure de Dedekind.

Définition Soit $A \subset \mathbb{Q}$ une partie de $\mathbb{Q}$. On dit que A est une coupure de Dedekind si

i) $A \neq \emptyset$ et $A \neq \mathbb{Q}$;

ii) $\forall a \in A \ \forall x \in \mathbb{Q}$, $a \leq x \Rightarrow x \in A$;

iii) $\forall a \in A \ \exists x \in A$, $x < a$.

Lemme. Soit $r \in \mathbb{Q}$. Alors l'ensemble

$$D_r := \{x \in \mathbb{Q} \mid r < x\}$$

est une coupure de Dedekind.

$\mathbb{R}_{\text{Dedekind}} :=$ l'ensemble de toutes de coupures de Dedekind.

si A et B coupures alors

$$A \underset{\text{Dedek}}{+} B := \{ z \in \mathbb{Q} \mid \exists x \in A, \exists y \in B, z = x + y \}$$

est une coupure.

$$A \underset{\text{Ded}}{<} B \quad \text{si} \quad B \subsetneq A$$

$$\imath : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}_{\text{Dede}} \qquad r \longmapsto D_r$$

On montre que $\mathbb{R}_{\text{Dede..}}$ est un corps ordonné, Archimedien, complet.

3. Développement décimal

$\mathbb{R}_{10}$:= l'ensemble des suites $(x^j)_{j \in \mathbb{N}}$ des nombres entiers (de $\mathbb{Z}$) telles que $\forall \, j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $0 \leq x^j \leq 9$, et de plus $x^j \neq 9$ pour un nombre infini de j.

$$x_0, x_1\, x_2\, x_3$$

$$x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \frac{x_3}{10^3} + \ldots$$

Chiron —

$$\left(x_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{10^i}\right)_n \longleftrightarrow x_0, x_1, x_2$$

$\mathbb{R}_{10}$ — un corps ordonné Archimedien complet.

$\mathbb{R}_5$, $\mathbb{R}_{12}$, $\mathbb{R}_{60}$ ...

Théorème Soient $\mathbb{R}_1$ et $\mathbb{R}_2$ deux corps ordonnés Archimediens complets. Alors $\mathbb{R}_1$ et $\mathbb{R}_2$ sont des corps ordonnés isomorphes.

Théorème Il n'existe pas une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Hypothèse de continuum (HC)

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie infinie de $\mathbb{R}$. Alors $\exists$ une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to A$ ou $\exists$ une bijection $\psi : \mathbb{R} \to A$.

Th (Gödel) Si ~~les postulat de~~ la théorie d'ensembles $^{(ZFC)}$ est consistante (consistent)
compatible
conséquent

alors la ZFC + HC est compatible.

Th (Cohen) Si ZFC est ~~consist~~ compatible alors ZFC + Non HC est compatible.

Corps Non-Archimédiens