Théorèmes classiques de géométrie

1. **Théorème de Thalès.** Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Soient $A, B, C \in \mathcal{E}$ tels que $\dim(A,B,C) = 2$. Soient $B_1 \in (A,B)$ et $C_1 \in (A,C)$ tels que $(B,C) \parallel (B_1,C_1)$. Montrer que

$$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{AC}}.$$

2. **Théorème que trois médianes d'un triangle se coupent en exactement un point.** Soient $A, B, C \in \mathcal{E}$ tels que $\dim(A,B,C) = 2$. Montrer que

$$\left(A, \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C\right) \cap \left(B, \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}C\right) \cap \left(C, \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B\right) = \left\{\tfrac{1}{3}A + \tfrac{1}{3}B + \tfrac{1}{3}C\right\}$$

et

$$\frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{A, \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C} = \overrightarrow{A, \tfrac{1}{3}A + \tfrac{1}{3}B + \tfrac{1}{3}C}.$$

3. **Théorème de Ménélaüs.** Soient Π un plan affine et $A, B, C \in \Pi$ affinement libres. Soient $P \in (BC)$, $Q \in (CA)$ et $R \in (AB)$ tels que $P \neq C$, $Q \neq A$ et $R \neq B$.

Alors les points P, Q et R appartient à la même droite si et seulement si

$$\frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{QC}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{RA}}{\overrightarrow{RB}} = 1.$$

4. Théorème de Ceva. On suppose le même que dans l'exercice 3. Alors les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourants ou parallèles si et seulement si

$$\frac{\overrightarrow{PB}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{QC}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{RA}}{\overrightarrow{RB}} = -1.$$

5. Théorème de Varignon. Dans un quadrilatère quelconque, les milieux des côtes forment les sommets d'un parallélogramme.

6. Théorème de Pappus. Soit $\mathcal{E}$ un plan affine. Soient $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{E}$ trois points alignés et $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathcal{E}$ trois autres points alignés. On suppose que les points d'intersection existent $\{S_1\} = (P_2 Q_3) \cap (P_3 Q_2)$, $\{S_2\} = (P_3 Q_1) \cap (P_1 Q_3)$ et

$S_3 = (P_1 Q_2) \cap (P_2 Q_1)$. (On suppose aussi que les points $\{A\} = (P_3 Q_1) \cap (P_2 Q_3)$, $\{B\} = (P_1 Q_2) \cap (P_3 Q_1)$ et $\{C\} = (P_1 Q_2) \cap (P_2 Q_3)$ existent et sont affinement libres). Alors les points S_1, S_2 et S_3 sont alignés.