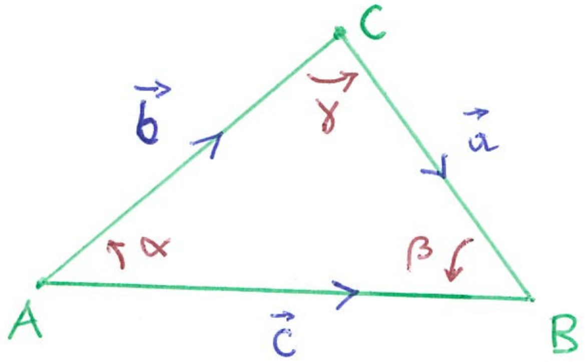
Triangle euclidien



$$\alpha = \widehat{c,b} \qquad \beta = \widehat{-a,-c} \qquad \gamma = \widehat{-b,a}$$

1. La formule de sinus.

$$\frac{\sin\alpha}{\|\vec{a}\|} = \frac{\sin\beta}{\|\vec{b}\|} = \frac{\sin\gamma}{\|\vec{c}\|} = \frac{2\,\text{Aire}\,\Delta ABC}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\,\|\vec{c}\|}$$

2. Théorème du cosinus de Al-Kashi.

$$\cos\alpha = \frac{\|\vec{b}\|^2 + \|\vec{c}\|^2 - \|\vec{a}\|^2}{2\,\|b\|\,\|c\|}$$

3. Propriétés du produit scalaire.

i) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{1}{4}\left(\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}-\vec{b}\|^2\right)$,

ii) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{1}{2}\left(\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2\right)$,

iii) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{1}{2}\left(\|\vec{a}\|^2 + \|b\|^2 - \|a-b\|^2\right)$,

iv) $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 + \|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = 2\left(\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2\right)$.

4. Soit M le barycentre du système pondéré (A, 1) et (B, 1) (le milieu de [AB]). Alors

$$4\,\|\overrightarrow{CM}\|^2 = 2\,\|\overrightarrow{AC}\|^2 + 2\,\|\overrightarrow{BC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2.$$

Posons $a = \|\vec{a}\|$, $b = \|\vec{b}\|$, $c = \|\vec{c}\|$ et

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

5. On a les identités

$$\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle + bc = 2p(p-a)$$

$$\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle - bc = -2(p-b)(p-c).$$

6. Montrer que

$$(\text{Aire}\,\Delta ABC)^2 = \frac{1}{4}\,\text{dét}\begin{pmatrix} \langle \vec{c}, \vec{c} \rangle & \langle \vec{c}, \vec{b} \rangle \\ \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \end{pmatrix}.$$

7. Théorème (La formule de Heron)

$$|\text{Aire}\,\Delta ABC| = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

8. Montrer les formules

$$\cos\alpha = \frac{2p(p-a)}{bc} - 1 = 1 - \frac{2(p-b)(p-c)}{bc},$$

$$|\sin\alpha| = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Isométries du plan affine euclidien

Soit $\mathbb{E}$ un plan vectoriel euclidien.

1. Soient S une symétrie orthogonale de $\mathbb{E}$ par rapport à une droite et R une rotation. Alors $S \cdot R \cdot S = R^{-1}$.

2. Soient $v, w \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ et S une symétrie orthogonale de $\mathbb{E}$ par rapport à une droite. Alors
$$\widehat{v, w} = -\widehat{S(v), S(w)} = \widehat{S(w)\, S(v)}.$$

Soit Π un plan affine euclidien

Définition. On dit que $f : \Pi \to \Pi$ est une isométrie si $\forall\, (P, Q) \in \Pi^2$,
$$d(f(P), f(Q)) = d(P, Q).$$

3. Soient A, B, C trois points de Π non-alignés. Soit $f : \Pi \to \Pi$ une isométrie de Π. Si $f(A) = A$, $f(B) = B$ et $f(C) = C$ alors $f = Id_{\Pi}$.

4. Soient A_1, A_2, A_3 trois points de Π non-alignés. Soient B_1, B_2, B_3 aussi trois

points de Π. Si $\forall\ i,j \in \{1,2,3\}$, $d(A_i,A_j) = d(B_i,B_j)$ alors il existe une isométrie affine $f:\Pi \to \Pi$ telle que $\forall\ i \in \{1,2,3\}$, $f(A_i) = B_i$.

5. Montrer qu'une isométrie de Π, est une isométrie affine.

<u>Définition.</u> Soit $g: \vec{\Pi} \to \vec{\Pi}$ une isométrie de dét $g = 1$. Soit $Q \in \Pi$. L'application $f:\Pi \to \Pi$ définie par $f(P) = Q \dot{+} g(\overrightarrow{QP})$ s'appelle une rotation affine de centre Q.

Si Π est orienté et g est une rotation d'angle φ alors on dit que f est une rotation affine de centre Q et d'angle φ.

6. Soit $f: \Pi \longrightarrow \Pi$ une isométrie affine telle que dét $f = 1$. Alors f est une translation ou une rotation.

7. On suppose $\Pi = \mathbb{C}$, donc $\vec{\Pi} = \mathbb{C}$ avec $\langle z, z_1 \rangle = \mathrm{Re}(z\bar{z}_1)$. Trouver des translations et des rotations affines de $\Pi = \mathbb{C}$. Étudier des composées des translations et des rotations affines.

α) Montrer que $c: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $c(z) = \bar{z}$ est une symétrie orthogonale par rapport à l'axe réel.

projet du partiel

1. Soient Π un plan affine et A, B, C une base affine de Π. Soit $P \in \Pi$ un point de Π dont coordonnées barycentrique dans la base affine A, B, C sont $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$.

On suppose que P, B, C est aussi une base affine de Π.

Soit $Q = \tau_{\overrightarrow{AB}}(P)$. Trouver les coordonnées barycentrique de Q dans la base affine P, B, C et les coordonnées cartesiennes de Q dans le repère $(P; \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC})$.

2. Théorème de Varignon.

3. Soit $P = 1 + i \in \mathcal{H}$ et soit l la droite hyperbolique passant par $2i$ et $5i$. Trouver les equations en z et $\bar{z}$ de deux droites hyperboliques distinctes passant par P et parallèles à la droite l.

4.

5.