$\mathbb{H}$

1. Exprimer les équations de la droite euclidienne $ax+by+c=0$ et du cercle euclidien $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ en termes des coordonnées complexes z et $\bar{z}$.

2. Soit $\mathbb{S}^1=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$. Soit A un cercle euclidien de centre $re^{i\theta}$ avec $r>1$ et rayon $s>0$. Montrer que A est perpendiculaire à $\mathbb{S}^1$ ssi $s=\sqrt{r^2-1}$.

3. Soient P et Q dans $\mathbb{H}$ t.q. $\operatorname{Re}P\neq\operatorname{Re}Q$. Donner l'équation de la droite hyperbolique passant par P et Q en termes de P et Q.

4. Donner les équations explicites de deux droites hyperboliques distinctes

   a) passant par i et parallèles à $\ell=\mathbb{H}\cap\{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Re}z=3\}$

   b) passant par i et parallès à $l=\mathbb{H}\cap\{z\in\mathbb{C} \mid |z+2|=1\}$.

LONGUEUR HYPERBOLIQUE

~~1.~~ Montrer que le valeur absolu de la longueur hyperbolique d'une courbe paramétrée ne depend pas de choix de paramétrisation.

2. Soient p et q appartient à la droite
(1) hyperbolique $l_{a,\infty}$. Trouver longueur hyperbolique ~~de l'intervale~~ du segment hyperbolique de p à q.

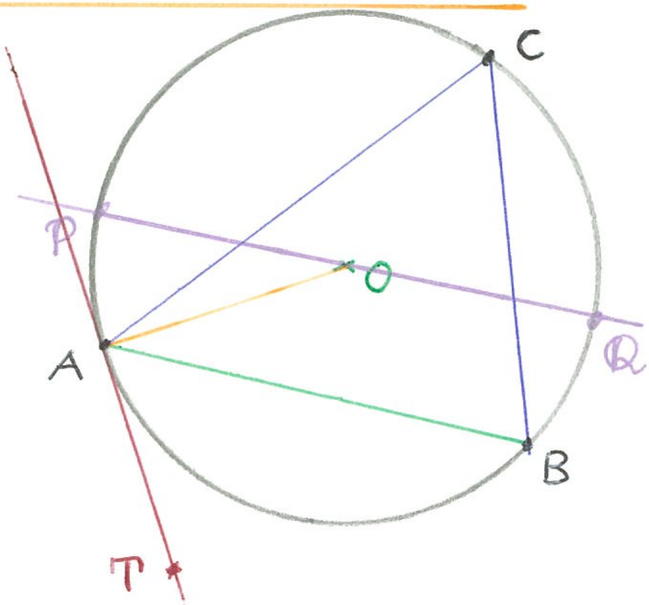
3. Trouver le milieu du segment hyper-
(3p) bolique de A à B, où $A = a + ip$ et $B = a + iq$.

4. Calculer les longueurs hyperboliques du
(1p) segment euclidien de i à $1+i$ et du segment hyperbolique de i à $1+i$. Comparez les deux nombres obtenu.

5. Soient des points $P = x_1 + iy_1$ et $Q = x_2 + iy_2$
(3p) appartient à la droite hyperbolique $l(c,r)$.
Alors

$$d_h(P,Q) = \left| \log \frac{(x_1 - c - r)\, y_2}{y_1 (x_2 - c - r)} \right|$$

Cercle euclidien



Soit S un cercle de centre O et de rayon r. Soient $A, B, C, P, Q \in S$.

1. $\widehat{AOB} = 2\,\widehat{ACB}$.

2. Si la droite (PQ) passe par le centre O du cercle alors $2\,\widehat{PCQ} = \varpi$.

3. Soit T un point du plan. La droite (AT) est tangente au cercle S ssi $\langle \overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AO} \rangle = 0$.

4. Étudier un nombre des points d'intersection d'un cercle avec une droite (affine)

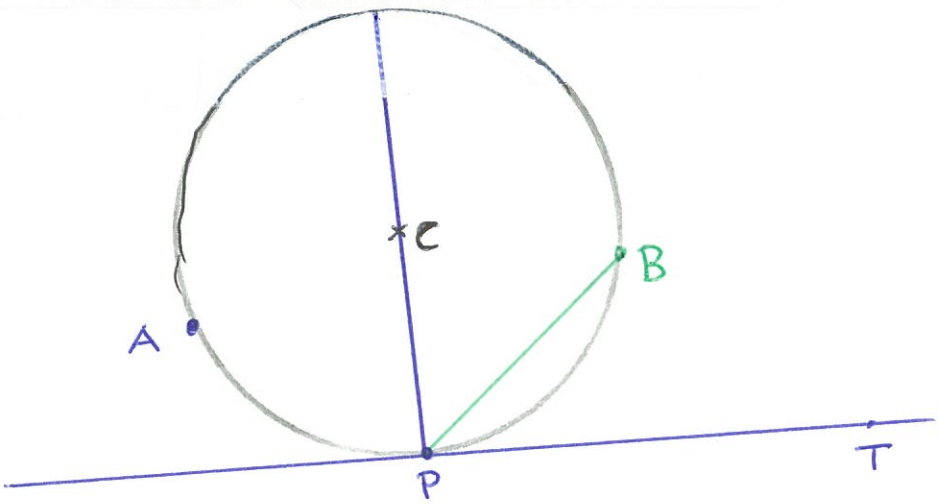
5. Une droite affine d est tangente à un cercle S si et seulement si $\operatorname{cardinal}(d \cap S) = 1$.

6. Par trois points non-alignés du plan euclidien passe un et seulement un cercle.

7. Soient S_1 et S_2 deux cercles de centres O_1 et O_2 et de rayon r_1 et r_2 respectivement. Étudier le cardinal$(S_1 \cap S_2)$ en fonction de r_1, r_2 et $d = \|\overrightarrow{O_1O_2}\|$.

8. Les cercles S_1 et S_2 sont tangents si et seulement si cardinal$(S_1 \cap S_2) = 1$.

9. Soient A, B, P, Q quatre points du plan Ils appartient un le même cercle ou sont alignés ssi $\widehat{APB} = \widehat{AQB}$.



10. Proposition 32 de livre III de Euclide.

Soient P, B appartient à un cercle S. Soit T un point du plan. La droite (PT) est tangente au cercle S si et seulement si $\widehat{TPB} = \widehat{PAB}$.

suite Isométries du plan affine euclidien

Soit $\mathbb{E}$ un plan vectoriel euclidien.

3. Soit $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ une isométrie telle que $\det f = -1$. Alors f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

Définition. Soit v, w une base orthonormée de $\mathbb{E}$. On dit qu'une application linéaire $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ est une symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathrm{Vect}(v)$, si $f(v) = v$ et $f(w) = -w$.

0. Montrer qu'une symétrie orthogonale de $\mathbb{E}$ par rapport à une droite est une isométrie (linéaire) de $\mathbb{E}$.

Soit Π un plan affine euclidien.

7. Soit $\Pi = \mathbb{C}$, le plan complexe muni du produit scalaire $\langle z, z_1 \rangle = \mathrm{Re}(z \bar{z}_1)$. Trouver la forme des translations et des rotations affines de $\mathbb{C}$.

8. On suppose Π orienté. Soient $R_{Q,\varphi}$ et R_{Q_1,φ_1} deux rotations affines et τ_v une translation. Trouver $R_{Q,\varphi} \circ R_{Q_1,\varphi_1}$, $R_{Q,\varphi} \circ \tau_v$ et $\tau_v \circ R_{Q,\varphi}$.

Définition. On dit que $f : \Pi \to \Pi$ est une réflexion si f a un point fixe et $\vec{f}$ est une symétrie orthogonale.

9. Soit $f : \Pi \to \Pi$ une réflexion. Alors

i) il existe une droite affine d t. q. $\forall D \in d$, $f(D) = D$;

ii) $f^2 = Id_\Pi$;

iii) si $P \notin d$, alors la droite passant per P et $f(P)$ est orthogonale à la droite d ($\overrightarrow{Pf(P)} \perp \vec{d}$),

iv) la droite passant per P et $f(P)$ coupe la droite d en point $P \dot{+} \frac{1}{2} \overrightarrow{Pf(P)}$.

On dit que f est une réflexion par rapport à la droite d.

10. Montrer que chaque rotation est une composée de deux réflexions.

11. Montrer que chaque translation est une composée de deux réflexions.