Isométries hyperboliques

1. Trouver une réflexion hyperbolique R de $\mathbb{H}$ telle que

a) $R(l(-6,2)) = l(0,1)$ b) $R(l(-6,2)) = l(0,2)$.

2. Trouver une réflexion hyperbolique R de $\mathbb{H}$ telle que $R(l(0,1)) = l_{0,\infty}$.

3. Trouver une isométrie hyperbolique f de $\mathbb{H}$ telle que $f(l(0,1)) = l(0,1)$ et $\forall\ P \in l(0,1)$, $d_h(P, f(P)) = 1$ (resp. d).

4. a) Trouver une droite hyperbolique $d \perp l(4,4)$ et passant par $6+3i$.

b) Trouver une isométrie hyperbolique f telle que $f(l(4,4)) = l(0,1)$ et $f(d) = l_{0,\infty}$.

c) Calculer la distance hyp. du point $6+3i$ de la droite hyp. $l(4,4)$ (du point de l'intersection $d \cap l(4,4)$).

5. Soient l_1 et l_2 deux droites hyp. ultra-parallèles. Trouver une droite hyp. $\perp$ à l_1 et l_2.

Distance hyperbolique

1. Soient l une droite hyp. de $\mathbb{H}$ et P un point de $\mathbb{H}$. Montrer qu'il existe une unique droite hyp. d telle que $P \in d$ et $d \perp l$.

2. Soient l une droite hyp. de $\mathbb{H}$, P un point de $\mathbb{H}$ et d la droite hyp. passent par P et perpendiculaire à l. Montrer que pour chaque point A de l on a
$$d_h(P, A) \geq d_h(P, Q)$$
où $Q \in l \cap d$, et qu'on a une égalité seulement pour $A = Q$.

3. Formule de Bolyai-Lobatchevskii

Soient $l = l_{x,c}$ et $n = l_{x_1,c}$ deux droites hyp. parallèles. Soit $P \in n$. Soit q la droite hyperbolique passent par P et perpendiculaire à l. Exprimez l'angle qui forment les droites n et q en point P en fonction de la distance hyperbolique du point P de la droite l.

4. Soient $A, B \in \mathbb{H}$. Montrez que l'ensemble
$$\{ P \in \mathbb{H} \mid d_h(P, A) = d_h(P, B) \}$$

Réflexions hyperboliques et la distance hyperbolique

1. Trouver l'équation d'une droite l hyperbolique passant par deux points donnés $A = 3i$ et $B = -6+3i$ (ou $B = 7i$ ou $B = 5+i$).

2. Soit l une droite hyperbolique. Trouver une droite hyperbolique q passant par le point A et perpendiculaire à l. Par exemple $l = l(0,3)$ et $A = 3i$ (ou $A = 1+i$ ou $A = -3+3i$) ou $l = l_{0,\infty}$ et A le même comme avant.

3. Trouver l'équation de la droite hyperbolique p perpendiculaire à la droite hyperbolique $q_1 = l(0,1)$ et à la droite hyperbolique $q_2 = l(3,1)$ (ou $l(0,3)$ ou $l_{2,\infty}$).

4. Trouver une réflexion hyperbolique R telle que l'image de la droite hyperbolique $l(-1,1)$ est une droite hyperbolique $l_{4,\infty}$ (ou $l(-1,2)$ ou $l(0,1)$ ou $l(2,2)$

5. Trouver une droite hyp. q perpendiculaire à $l_{0,\infty}$ et $l(5,3)$. Soient A et B les points de l'intersection de q avec $l_{0,\infty}$ et $l(5,3)$.

On cherche le milieu hyperbolique du segment hyp. $[A,B]_h$.

i) Trouver une réflexion hyp. R telle que l'image de q est une droite de la forme $l_{c,\infty}$ pour certain c.

(On peut prendre $l_{0,\infty}$ par exemple)

ii) Trouver les points $R(A)$ et $R(B)$.

Trouver le milieu hyperbolique du segment hyp. $[R(A),R(B)]_h$.

(L'ex. 3, feuille : longueur hyperbolique)

iii) Trouver le milieu hyperbolique du segment hyp. $[A,B]_h$.

(On rappelle ; R est une isométrie hyperbolique, R est une réflexion hyperbolique donc $R^2 = Id$, d'où $R^{-1} = R$)

6. Soit R_1 (resp. R_2) la réflexion hyperbolique dans la droite hyp. $l_{0,\infty}$ (resp. $l(5,3)$)

Soit $T := R_1 \circ R_2$. Trouver la formule pour $T(z)$.

Soit q la droite hyp. perpendiculaire à $l_{0,\infty}$ et $l(5,3)$. Montrer que $T(q) = q$.