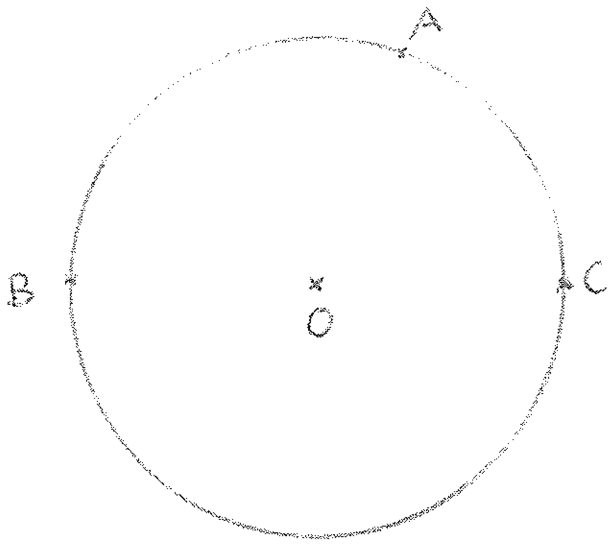
Cercle euclidien

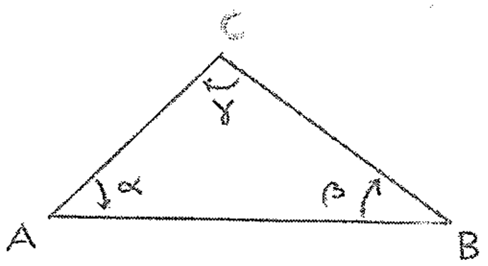


11.0 Soit S un cercle de centre O. Soient $A, B, C \in S$. L'angle $\widehat{BAC}$ est droit si et seulement si $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OC}$ (O est le milieu du segment BC).

Triangle euclidien II

Π - un plan affine euclidien

1. **Théorème.** Soient $A, B, C \in \Pi$ trois points affinement libres. Les trois médiatrices du triangle ABC se coupent en un point O qui est le centre du cercle circonscrit au triangle (i.e. le cercle passant par les sommets).



2. **Théorème.** Soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC. Alors

$$2R = \frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{\sin\gamma} = \frac{\|\overrightarrow{AC}\|}{\sin\beta} = \frac{\|\overrightarrow{BC}\|}{\sin\alpha}.$$

3. **Théorème.** Les trois bisectrices du triangle ABC se coupent en un point qui est le centre du cercle inscrit dans le triangle.

Posons $a = \|\vec{BC}\|$, $b = \|\vec{AC}\|$, $c = \|\vec{AB}\|$.

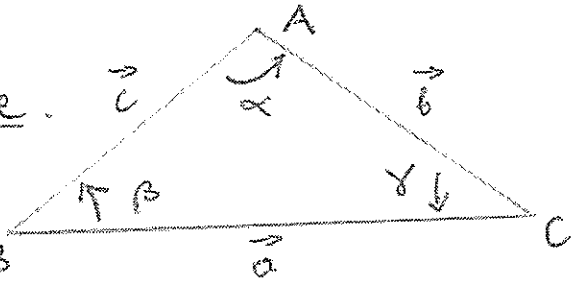
4. Théorème. Le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC est donné par

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

où $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

5. Théorème. Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

6. Théorème.



Le triangle ABC est isocèle en A si et seulement si $\widehat{CBA} = \widehat{ACB}$.

(placer dans Triangle euclidien I)

INVERSION I

1. Montrez que sur $\mathbb{C}$,

$$\tau_a \circ I_{0,k} \circ \tau_{-a} = I_{a,k}.$$

2. Soit $I : \Pi \setminus \{\Omega\} \to \Pi \setminus \{\Omega\}$ l'inversion de centre Ω et de puissance k. Montrez que $I^2 = Id_{\Pi \setminus \{\Omega\}}$. Montrez que si $k > 0$ alors l'ensemble de points fixes de I est un cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{k}$.

3. Soit I l'inversion de $\mathbb{C}$ de centre 0 et de puissance 4. Soient m la droite $x = -4$ et q le cercle $x^2 + (y-2)^2 = 1$. Trouver $I(m)$ et $I(q)$.

4. Trouver l'inversion $I_{z_0,k}$ de $\mathbb{C}$ qui transforme le cercle $x^2 + y^2 = 4$ dans la droite $y = 6$.

5. Montrez que

$$I_{z_0,k} = \tau_{z_0} \circ h_k \circ f \circ c \circ \tau_{-z_0},$$

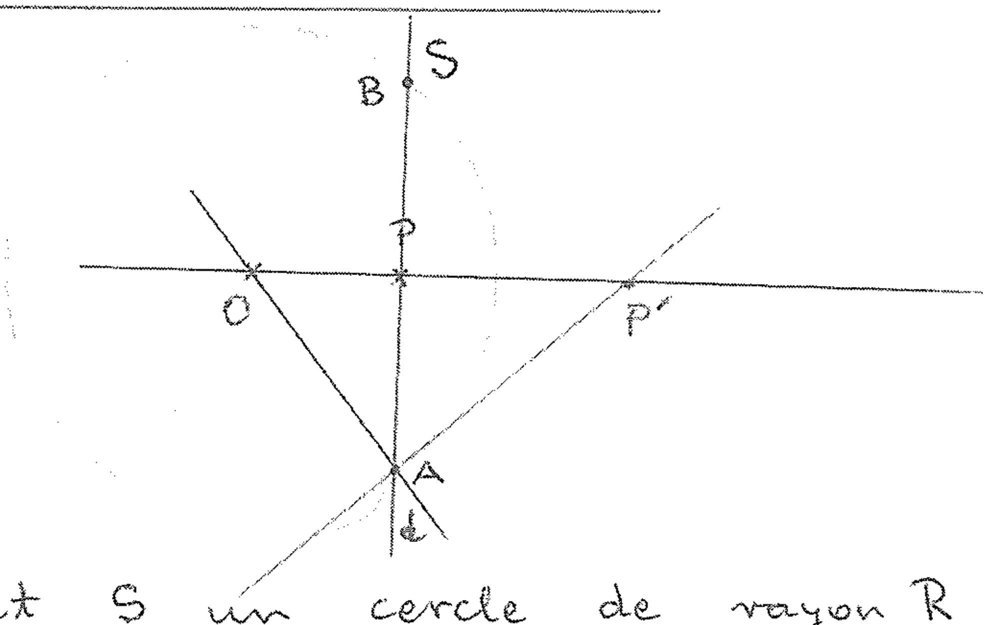
où $c(z) = \overline{z}$, $f(z) = \frac{1}{z}$ et $h_k(z) = kz$.

INVERSION II

1. Théorème de Ptolémée. Dans un plan affine euclidien, un quadrilatère convexe $ABCD$ est inscriptible dans un cercle si et seulement si

$$|AC|\cdot|BD| = |AB|\cdot|CD| + |AD|\cdot|BC|.$$

2. Construction d'un image d'un point par une inversion.



Soit S un cercle de rayon R et de centre O. Soit P un point du plan à l'intérieur du cercle.
Soit d une droite $\perp$ à (O,P). Soient A, B les points d'intersection de S avec d.
Soit l la droite passant par A et $\perp$ $\overrightarrow{OA}$.
Soit P' un point d'intersection de l et (O,P).
Montrer que $P' = I_{O,R^2}(P)$.

Cercles orthogonaux

1. Soit S un cercle de centre O et de rayon r. Soit P un point de plan euclidien. Montrer qu'il existe un cercle de centre appentenant à (O,P), passant per P et orthogonal à S.

2. Soit S un cercle du plan euclidien et P un point exterieur du cercle. Montrer qu'il existe un cercle de centre P orthogonal à S.

3. Soient S et q deux cercles orthogonaux. Montrer qu'il existe une inversion I telle que $I(S) = S$ et $I(q)$ est une droite passant par le centre de S.

0. Soient S un cercle et P un point du plan euclidien. On suppose que P est un point exterieur du cercle. Montrer qu'il existe deux tangentes à S passant per P. Construire ces tangentes avec la règle et le compas.

1) Soit S un cercle et $P \notin S$. Montrer qu'il existe un cercle q tel que $P \in q$ et S et q sont orthogonaux

Cercles orthogonaux (suite)

4. Soient C_1 et C_2 deux cercles euclidiens de centres O_1 et O_2 et de rayons r_1 et r_2 respectivement. Les cercles C_1 et C_2 sont orthogoneux ssi $r_1^2 + r_2^2 = \|\overrightarrow{O_1O_2}\|^2$.

5. Soient C_1 et C_2 deux cercles. Alors $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ ssi $\exists$ (une droite eucl. ou une cercle eucl.) ortogonal à C_1 et à C_2.

Ex. Soient S_1 et S_2 deux cercles de centres O_1 et O_2 et de rayons r_1 et r_2. Montrer que S_1 et S_2 sont orthogonaux ssi

$$r_1^2 + r_2^2 = \|\overrightarrow{O_1O_2}\|^2.$$

Inversions : suite

A). Soient S_1 et S_2 deux cercles des équations $x^2+y^2=4$ et $(x-6)^2+y^2=1$. Trouver une inversion I telle que $I(S_1)=S_2$.

B) Soient S_1 et S_2 deux cercles de rayons distincts. Montrez qu'il existe une inversion I telle que $I(S_1)=S_2$.

Isométries du plan euclidien

classification, générateurs

1. Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la structure canonique euclidienne. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donné par

a) $f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$,

b) $f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}+2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$,

c) $f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2}-2 \end{pmatrix}$,

d) $f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est une isométrie. Trouver les points fixes de f. Trouver les droites invariantes de f (des droites ℓ t.q. $f(\ell) = \ell$). Est-ce que f est une rotation, symétrie, glissement ou translation. En identifiant $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$, présenter chaque f en coordonnées z et $\bar{z}$.

2. La rotation de l'ex. 1 présenter comme un composé de deux symétries.

3. La translation $\tau_{(1,2)}$ présenter comme un composé de deux symétries.

Isométries de $\mathbb{H}$

1. Soit $l = l(c,r)$ une droite hyperbolique passant par i. Calculez les composition

$$\underline{R_l \circ R_{l_{0,\infty}}} \quad \text{et} \quad R_{0,\infty} \circ R_l .$$

Calculer leurs différentielles en i. Exprimer les coefficients des compositions et des leurs différentielles en fonction de l'angle entre l et $l_{0,\infty}$.

2. Soient $P, Q \in \mathbb{H}$. Montrez qu'il existe une ~~r~~éflexions hyp. f (resp. une isométrie hyperbolique f) telle que $f(P) = Q$.

3. Soient $A, B, A_1, B_1 \in \mathbb{H}$ ~~Montrez qu'il existe~~ tels que $d_h(A,B) = d_h(A_1,B_1)$. Montrez qu'il existe une isométrie hyp. f telle que $f(A) = A_1$ et $f(B) = B_1$.

4. Soient a, b deux droites hyperboliques. Montrez qu'il existe une réflexions hyperbolique f telle que $f(a) = b$.

5. Trouver une réflexion hyp. R telle que $R(l_{0,\infty}) = l(2,1)$. 6. Trouver une isométrie hyp. f telle que $f(l_{0,\infty}) = l(2,1)$ et $f(i) = 2+i$.