Université de Nice Sophia Antipolis — Licence L2 - Géométrie

Année 2009/2010 - semestre 4 -

Interrogation écrite du 26 avril 2010 (durée: 30mn) - Barème (à titre indicatif): 10, 12

Documents non autorisés. Calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Exercice 1. Le plan affine euclidien usuel $\mathcal{P}$ est supposé muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}\,, \vec{j}\,)$. Dans $\mathcal{P}$ on se donne deux points distincts A et B. On dit qu'une isométrie f de $\mathcal{P}$ échange A et B si $f(A)=B$ et $f(B)=A$.

1. Si $f\colon \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ est une isométrie échangeant les deux points A et B, que devient la médiatrice du segment $[A, B]$ sous cette transformation? Justifiez votre réponse.

2. Combien y a-t-il d'isométries de $\mathcal{P}$ échangeant les points A et B? Justifiez votre réponse.

3. Combien y a-t-il d'isométries g telles que $g(A) = A$ et $g(B) = B$? Peut-on expliquer simplement pourquoi il y en a autant que dans la question précédente?

4. On suppose que dans le repère $(O, \vec{i}\,, \vec{j}\,)$ les points A et B ont pour coordonnées respectives $(2, 0)$ et $(-2, 2)$. On note Δ la médiatrice du segment $[A, B]$, s_Δ la symétrie orthogonale par rapport à Δ.

   a) Donner un vecteur directeur de $\vec{\Delta}$.

   b) Quelle est la matrice de la partie linéaire $\vec{s_\Delta}$ de s_Δ dans la base $(\vec{i}\,, \vec{j}\,)$ de $\vec{\mathcal{P}}$?

Exercice 2. X est un espace affine euclidien de dimension 3, muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}=(O, \vec{i}\,, \vec{j}\,, \vec{k}\,)$. On note (x, y, z) les coordonnées d'un point M de X dans le repère $\mathcal{R}$.
Soient A, B et C les points de coordonnées respectives $(0, 0, 3)$, $(3, 0, 0)$ et $(0, -3, 0)$.
On note $\mathcal{P}$ le plan engendré par A, B et C.

1. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

2. Montrer que le point ω de coordonnées $(1, -1, 1)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ et que ω est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

3. Pour $M \in X$, si d_M désigne la distance de M au plan $\mathcal{P}$, il existe un unique point $N \in \mathcal{P}$ tel que $d_M = \left\|\overrightarrow{MN}\right\|$. Le point M étant donné, expliquer comment on trouve le point N (on ne demande pas de faire des calculs).

4. Quelle est la distance du point O (origine du repère) au plan $\mathcal{P}$?

5. On dit qu'un point $M \in X$ est équidistant aux points A, B et C si $\left\|\overrightarrow{MA}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MC}\right\|$.

   a) Montrer que si $\overrightarrow{\omega M} \in \vec{\mathcal{P}}^{\perp}$, alors M est équidistant à A, B et C.

   b) Montrer que si M est équidistant à A, B et C, alors $\overrightarrow{\omega M} \in \vec{\mathcal{P}}^{\perp}$.

   c) Que peut-on dire de l'ensemble des points équidistants à A, B et C? Justifiez votre réponse.
