Seconde session - Épreuve du 17 juin 2010 (durée: 2h) - Barème (à titre indicatif): 3, 5, 8, 8

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. Rédaction sobre et pertinente exigée.

Exercice 1. X est un espace affine réel de dimension 3. Soient M_1, M_2, M_3 et M_4 quatre points non coplanaires de X. On note I_1 le milieu de $[M_1M_2]$, I_2 le milieu de $[M_2M_3]$, I_3 le milieu de $[M_3M_4]$ et I_4 le milieu de $[M_4M_1]$.

Montrer que $I_1I_2I_3I_4$ est un parallélogramme. Faire un dessin.

Exercice 2. Le plan affine euclidien usuel $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}=(O,\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

Soient A, B, A', B' les quatre points dont les coordonnées sont respectivement

$$(-4,-1),\ (0,-4),\ (2,0)\ \text{ et }\ (6,3).$$

1. Vérifier que les segments $[AB]$ et $[A'B']$ ont même longueur.

2. Pour chacun des segments $[AA']$ et $[BB']$, donner une équation cartésienne de sa médiatrice.

3. Une rotation r envoie A sur A' et B sur B'. Déterminer le centre ω de cette rotation.

4. Si θ est une mesure de l'angle de la rotation r, on rappelle que la matrice de $\vec{r}$ dans la base $(\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ de $\vec{\mathcal{P}}$ est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
   Sachant que $\vec{r}\,(\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{A'B'}$, donner les valeurs de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
   En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'B'}$ et le déterminant $\det_{(\vec{i}\,,\vec{j}\,)}(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{A'B'})$ pourriez-vous retrouver l'angle de la rotation?

5. Faire un dessin et y placer les points A, B, A', B', ω et $O'=r(O)$. On ne demande pas de calculer précisément les coordonnées de O'.

Exercice 3. Soient $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien usuel, $\mathcal{D}$ une droite affine de $\mathcal{P}$.

On considère $\vec{v}\in\vec{\mathcal{P}}$ et on pose $f=s_{\mathcal{D}}\circ t_{\vec{v}}$, $g=t_{\vec{v}}\circ s_{\mathcal{D}}$, où $s_{\mathcal{D}}$ est la réflexion par rapport à la droite $\mathcal{D}$ et $t_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $\vec{v}$. On dit que $s_{\mathcal{D}}$ et $t_{\vec{v}}$ commutent si pour tout $M\in\mathcal{P}$, on a $f(M)=g(M)$.

1. Montrer que f admet au moins un point fixe si et seulement si $\vec{v}\in\vec{\mathcal{D}}^{\perp}$. Que peut-on dire de l'ensemble des points fixes de f? A-t-on un énoncé analogue pour g? Faire un dessin.

2. Montrer que si $\vec{v}\notin\vec{\mathcal{D}}$, alors pour tout $M\in\mathcal{D}$, on a $f(M)\neq g(M)$. Faire un dessin.

3. Montrer que si $\vec{v}\in\vec{\mathcal{D}}$, alors pour tout $M\in\mathcal{P}$, on a $f(M)=g(M)$. Faire un dessin.

4. Montrer que $s_{\mathcal{D}}$ et $t_{\vec{v}}$ commutent si et seulement si $\vec{v}\in\vec{\mathcal{D}}$.

5. **(facultatif)** Montrer qu'il existe une droite $\mathcal{D}'$ parallèle à $\mathcal{D}$, un vecteur $\vec{v}'\in\vec{\mathcal{D}'}$ tels que $f=s_{\mathcal{D}'}\circ t_{\vec{v}'}$. A-t-on un énoncé analogue pour g? Faire un dessin.

TOURNER LA PAGE S.V.P.

Exercice 4. $\mathcal{P}$ est le plan euclidien usuel. Pour $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \vec{\mathcal{P}}$, on note $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ le produit scalaire de ces deux vecteurs.

1. Soient A, B et C trois points de $\mathcal{P}$.
   On suppose qu'il existe $N \in \mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$. Montrer qu'alors $\overrightarrow{CN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
   (*Vous pouvez éventuellement admettre ce résultat et faire la suite de l'exercice*)

   Indication: on pourra, en s'appuyant sur la relation de Chasles, écrire dans un premier temps, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ puis dans un second temps, utiliser successivement les égalités $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN}$.

2. Soient A, B et C trois points non alignés de $\mathcal{P}$. Déduire de la question précédente, que les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes en un point H appelé orthocentre du triangle ABC.
   (*Vous pouvez éventuellement admettre ce résultat et faire la suite de l'exercice*)

   Rappel: on appelle hauteur du triangle ABC, une droite passant par un sommet et orthogonale au côté opposé à ce sommet (par exemple la perpendiculaire à (BC) par A est la hauteur issue de A).
   La hauteur issue d'un sommet coupe le côté opposé à ce sommet en point appelé pied de cette hauteur.

3. Maintenant on suppose le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ et on considère les trois points A_m, B_m et C dont les coordonnées sont respectivement $(m, 0), (0, m)$ et $(0, 2)$, où $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ est un paramètre.

   a) On note H_m l'orthocentre du triangle $A_m B_m C$. Donner les coordonnées de H_m dans le repère $\mathcal{R}$. Que peut-on dire de H_m lorsque m parcourt $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$?

   b) On note E le point de coordonnées $(-1, 1)$ et D_m le pied de la hauteur issue de B_m. Montrer que D_m a pour coordonnées $\left(\frac{-2m^2 + 4m}{m^2 + 4}, \frac{2m^2 + 4m}{m^2 + 4}\right)$ et calculer la distance de D_m à E. Que peut-on dire du lieu des points D_m lorsque m parcourt $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$?

   c) On note (x_m, y_m) les coordonnées de D_m (pied de la hauteur issue de B_m). Calculer les limites suivantes:
   $\lim_{m \longrightarrow 0} (x_m, y_m)$, $\lim_{m \longrightarrow 2} (x_m, y_m)$, $\lim_{m \longrightarrow -\infty} (x_m, y_m)$, $\lim_{m \longrightarrow +\infty} (x_m, y_m)$.

   Commentez vos résultats.

   d) Pour $m = 4$, faire un dessin et y placer les points A_m, B_m, C, D_m, E, H_m.