Université de Nice Sophia Antipolis — Licence L2 - Géométrie

Année 2011/2012 - semestre 4 -

Partiel du 26 mars 2012 (durée: 1h30) - Barème (à titre indicatif): 10, 8, 4

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Rédaction sobre et pertinente exigée.

Exercice 1. $\mathcal{P}$ est un plan affine réel muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère dans ce plan, les six points A, B, C, D, E, M dont les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$ sont respectivement $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$ et $(0,m)$ où m est un paramètre réel.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le paramètre réel m pour que les droites (AE) et (BM) soient sécantes.
2. On suppose que les droites (AE) et (BM) sont sécantes et on note P_1 leur point d'intersection. Donner les coordonnées de P_1 (dans le repère $\mathcal{R}$).
3. Montrer que les droites (BD) et (CE) sont sécantes en un point P_2 dont on précisera les coordonnées.
4. Pour quelles valeurs du paramètre réel m les droites (AD) et (CM) sont-elles sécantes?
5. On suppose que (AD) et (CM) sont sécantes en P_3 et que $m \neq 4$. Montrer que P_3 est aligné avec les points P_1 et P_2 trouvés précédemment.
6. Faire un dessin illustratif de la configuration pour $m = -5$ et $m = -2$.

Exercice 2. Soient A, B, C et D quatre points non coplanaires d'un espace affine réel X de dimension 3. On note I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ et on définit une application affine $f\colon X \longrightarrow X$ en posant $f(A) = I$, $f(B) = J$, $f(C) = K$, $f(D) = L$.

1. Faire un dessin de la configuration puis exprimer les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{IL}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. On note $\vec{f}$ l'application linéaire associée à f. Quelle est la matrice de $\vec{f}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ de $\vec{X}$? L'application f est-elle bijective? Justifiez votre réponse.
3. On munit X du repère cartésien $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. Pour $M \in X$ on note (x, y, z) les coordonnées de M et (x', y', z') les coordonnées de $f(M)$ dans ce repère. Exprimer (x', y', z') en fonction de (x, y, z).
4. On considère les points P et Q de X dont les coordonnées sont respectivement $(1,2,3)$ et $(2,1,4)$ dans le repère $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. Déterminer l'image de la droite (PQ) par f.
5. Déterminer l'ensemble des points fixes de f.

Exercice 3. Soient X un espace affine réel de dimension au moins 2, A et B deux points de X, α et β deux réels non nuls tels que $\alpha \neq 1$ et $\beta \neq 1$. On note h_A l'homothétie de centre A et de rapport α, h_B l'homothétie de centre B et de rapport β.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que $h_B \circ h_A$ soit une translation puis exprimer en fonction de α, β et $\overrightarrow{AB}$, le vecteur associé à cette translation.
2. On suppose que $h_B \circ h_A$ n'est pas une translation. Montrer que $h_B \circ h_A$ admet un et un seul point fixe ω et que l'on a $(1 - \alpha\beta)\overrightarrow{A\omega} = (1 - \beta)\overrightarrow{AB}$. En déduire que w est le barycentre des points A et B affectés respectivement des poids $\beta(1 - \alpha)$ et $(1 - \beta)$.