Université de Nice Sophia Antipolis — Licence L2 - Géométrie

Année 2011/2012 - semestre 4 -

Partiel du 31 mai 2012 (durée: 2h) - Barème (à titre indicatif): 8, 12

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Rédaction sobre et pertinente exigée.

Exercice 1. Le plan euclidien usuel est supposé muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soient a et b deux nombres réels tels que $a^2 + b^2 \neq 0$, A et B les deux points du plan de coordonnées respectives $(a, 0)$ et $(0, b)$ (dans le repère $\mathcal{R}$). On note H le projeté orthogonal de l'origine O sur la droite (AB).

1. Donner une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Donner les coordonnées de H (dans le repère $\mathcal{R}$). Quelle est la distance de O à la droite (AB)?
3. Soient M et N deux points distincts du plan. On note I le milieu du segment $[MN]$.
   Pour un point P du plan, montrer que $\|\overrightarrow{IP}\|^2 = \|\overrightarrow{IM}\|^2 + <\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{NP}>$.
   En déduire que l'on a $\left\|\overrightarrow{IP}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{IM}\right\|^2 \Longleftrightarrow <\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{NP}> = 0$.
   ($<\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{NP}>$ désigne le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{NP}$)
   Indication: écrire $\left\|\overrightarrow{IP}\right\|^2 = <\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MP}, \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{NP}>$ et utiliser les propriétés du produit scalaire.
4. On suppose à présent que $b = 2$ et a parcourt $\mathbb{R}$.
   a) Soit J le milieu du segment $[OB]$. Déduire de la question 3) ci-dessus, la distance de H à J?
   b) Que décrit H lorsque a parcourt $\mathbb{R}$?
   c) On note (x_H, y_H) les coordonnées de H. Calculer $\lim\limits_{a \longrightarrow -\infty} (x_H, y_H)$ et $\lim\limits_{a \longrightarrow +\infty} (x_H, y_H)$.
   Quelle remarque avez-vous à faire sur les résultats de ces calculs?

Exercice 2. Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour $M \in \mathcal{P}$, on note (x, y) ses coordonnées dans ce repère. On considère $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = -1$, A le point de coordonnées $(2, 1)$, $s_{\mathcal{D}}$ la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}$, s_A la symétrie centrale de centre A.
On pose $f = s_A \circ s_{\mathcal{D}}$.

1. Faire un dessin (propre) et y tracer O, A, $\mathcal{D}$, $f(O)$, $f(A)$ et $f(\mathcal{D})$. Préciser l'équation de $f(\mathcal{D})$ et les coordonnées des points $f(O)$ et $f(A)$.
2. Répondre au choix à l'une des deux questions suivantes:
   i. Quelle est la matrice de la partie linéaire $\vec{f}$ de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\vec{\mathcal{P}}$?
   ii. Si M a pour coordonnées (x, y), donner les coordonnées de $f(M)$ en fonction de x et y.
3. On note Δ_1 la droite d'équation $y = 1$, Δ_2 la droite d'équation $x = 2$, s_{Δ_1} (resp. s_{Δ_2}) la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ_1 (resp. Δ_2).
   a) Quelle est la nature de la transformation plane $s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1}$? Justifiez votre réponse.
   b) Quelle est la nature de la transformation plane $s_{\Delta_1} \circ s_{\mathcal{D}}$? Justifiez votre réponse.
   c) Montrer que pour tout $M \in \Delta_2$, on a $f(M) \in \Delta_2$. Précisez la nature de la restriction de f à Δ_2.
   d) Expliquez brièvement pourquoi f n'admet pas de point fixe.
   e) Quelle est la nature de l'isométrie plane f?
4. Soit $\mathcal{D}'$ la droite d'équation $x - y - 1 = 0$. On note $s_{\mathcal{D}'}$, la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}'$.
   a) Quelle est la matrice de la partie linéaire de $s_{\mathcal{D}'}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$?
   b) On pose $g = s_{\mathcal{D}'} \circ f$. Quelle est la matrice de la partie linéaire de g dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$?
   c) Déterminer l'ensemble des points fixes de g puis préciser la nature de cette isométrie plane.
