Université de Nice Sophia Antipolis — Licence L2 - Géométrie

Année 2012/2013 - semestre 4 -

Interrogation écrite du 30 avril 2013 (durée: 30mn) - Barème (à titre indicatif): 10, 10.

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Rédaction sobre et pertinente exigée.

Exercice 1. Le plan euclidien usuel $\mathcal{P}$ est supposé muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.
On note (x, y) les coordonnées d'un point dans ce repère.

1. On considère dans $\mathcal{P}$ une droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ ($(a, b) \neq (0, 0)$), un point M de coordonnées (x_0, y_0) et on note $d(M, \mathcal{D})$ la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$. Montrer que
$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2. Soient A un point de coordonnées (a_1, a_2), B un point distinct de A. On pose $\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ et on note $\mathcal{D}$ la droite (AB).

   a) Donner en fonction de a_1, a_2, α et β une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ (droite (AB)).

   b) Pour $M \in \mathcal{P}$, on note $d(M, \mathcal{D})$ la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$. Montrer que
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times d(M, \mathcal{D}) = \left|\det_{(\vec{i}, \vec{j})}\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right)\right|.$$

3. On considère A, B et C les trois points de coordonnées respectives $(1, 1)$, $(2, 3)$ et $(4, -1)$. En utilisant la formule de la question 2.b), calculer la distance du point C à la droite (AB).

Exercice 2. Dans le plan euclidien usuel $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les deux points A et B de coordonnées respectives $(2, 0)$ et $(0, 1)$. On note $\mathcal{D}$ la droite (AB), $s_{\mathcal{D}}$ la réflexion d'axe $\mathcal{D}$. On rappelle que la partie linéaire $\overrightarrow{s_{\mathcal{D}}}$ de $s_{\mathcal{D}}$ est la réflexion vectorielle d'axe $\vec{\mathcal{D}}$.

1. Donner la matrice de $\overrightarrow{s_{\mathcal{D}}}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\vec{\mathcal{P}}$.

2. Donner les coordonnées du point $O' = s_{\mathcal{D}}(O)$.

3. Soit M un point de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}$. On note (x', y') les coordonnées de $s_{\mathcal{D}}(M)$ dans le même repère. Calculer x' et y' en fonction de x et y.

4. Soit s_O la symétrie centrale de centre O (origine du repère). On pose $f = s_O \circ s_{\mathcal{D}}$. On note Δ la droite orthogonale à $\mathcal{D}$ et passant par O.

   a) Décrire la partie linéaire $\vec{f}$ de f.

   b) Montrer que $f(\Delta) = \Delta$ et décrire la restriction de f à Δ.
