Université de Nice Sophia Antipolis — Licence L2 - Géométrie

Année 2012/2013 - semestre 4 -

Corrigé succinct de l'interrogation écrite du 5 mars 2013

Exercice 1.
Soient $\mathcal{P}$ un plan affine réel, A, B et C trois points non alignés de $\mathcal{P}$. On considère un quatrième point D tel que $ABDC$ est un parallélogramme ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$) et on définit une application affine $f\colon \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ en posant $f(A)=B$, $f(B)=C$, $f(C)=D$.

1. Quelle est la matrice de $\vec{f}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ de $\vec{\mathcal{P}}$?

   Solution: nous avons $\vec{f}\,(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; de même, $\vec{f}\,(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{f(A)f(C)}$; on a donc $\vec{f}\,(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ car $ABDC$ est un parallélogramme.
   La matrice de $\vec{f}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ de $\vec{\mathcal{P}}$ est donc $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Pour $M \in \mathcal{P}$, on note (x, y) les coordonnées de M dans le repère cartésien $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Donner, en fonction de (x, y), les coordonnées (x', y') de $f(M)$ dans ce même repère $\mathcal{R}$.

   Solution: on a $\overrightarrow{f(A)f(M)} = \vec{f}\,(\overrightarrow{AM}) = x\vec{f}\,(\overrightarrow{AB}) + y\vec{f}\,(\overrightarrow{AC}) = -x\overrightarrow{AB} + (x+y)\overrightarrow{AC}$. On en déduit que $\overrightarrow{AF(M)} = (1-x)\overrightarrow{AB} + (x+y)\overrightarrow{AC}$, donc $(x', y') = (1-x, x+y)$.

3. Résoudre l'équation (d'inconnue M) $f(M) = M$.

   Solution: D'après la question précédente, résoudre $f(M) = M$ revient à résoudre le système $\begin{cases} 1-x = x \\ x+y = y \end{cases}$.
   On remarque tout de suite que ce système n'admet pas de solution, donc f n'admet pas de point fixe.

4. Quelle est la matrice de $\vec{f^2}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ de $\vec{\mathcal{P}}$?

   Solution: utilisant la matrice calculée dans la question 1., on trouve que $\vec{f^2} = \vec{f}^{\,2}$ a pour matrice, la matrice identité.

5. Faire un dessin et y placer les points A, B, C, D, $f^2(A)$, $f^2(B)$, $f^2(C)$, $f^2(D)$.

   Solution: on a $f^2(A) = C$, $f^2(B) = D$. Comme $\vec{f^2} = \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{P}}}$, on obtient $\overrightarrow{f^2(A)f^2(C)} = \overrightarrow{AC}$, donc $f^2(C)$ se déduit de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. De même, $\overrightarrow{f^2(B)f^2(D)} = \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$, donc $f^2(D)$ se déduit aussi de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

6. Que peut-on dire de f^2.

   Solution: de $\vec{f^2} = \mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{P}}}$ nous déduisons que f^2 est une translation. Comme $f^2(A) = C$, f^2 est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Exercice 2.
Soit X un espace affine réel de dimension 3, muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note (x, y, z) les coordonnées d'un point M de X dans ce repère. Soient A, B, C_m les trois points de coordonnées respectives $(1, 1, 1)$, $(-1, 3, 3)$ et $(3, m^2 + 2m, 2m + 1)$ dans le repère $\mathcal{R}$, où m est un paramètre réel. On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $-x + 2y - 3z - 4 = 0$, Z_m le sous-espace affine de X engendré par les trois points A, B et C_m.

1. Donner une base de $\vec{\mathcal{P}}$ (la direction du plan affine $\mathcal{P}$).

   Solution: un vecteur $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ appartient à $\vec{\mathcal{P}}$ si et seulement si $-a + 2b - 3c = 0$. On trouve par exemple que $\left(2\vec{i} + \vec{j}, 3\vec{j} + 2\vec{k}\right)$ est une base de $\vec{\mathcal{P}}$.

2. Vérifier que $\overrightarrow{AB} \in \vec{\mathcal{P}}$. Que peut-on dire de l'intersection de la droite (AB) avec le plan $\mathcal{P}$?

   Solution: le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-2, 2, 2)$ et on vérifie facilement que ces coordonnées satisfont à l'équation homogène associée à celle du plan $\mathcal{P}$. On note que A n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$. La droite (AB) est donc faiblement parallèle au plan $\mathcal{P}$ ($(AB) \cap \mathcal{P} = \emptyset$).

3. Pour quelles valeurs du paramètre m a-t-on $\overrightarrow{AC_m} \in \vec{\mathcal{P}}$?

   Solution: nous avons $\overrightarrow{AC_m} = 2\vec{i} + (m^2 + 2m - 1)\vec{j} + 2m\vec{k}$. Au vu de l'équation de $\mathcal{P}$, ce vecteur appartient à $\vec{\mathcal{P}}$ si et seulement si $-2 + 2(m^2 + 2m - 1) - 6m = 0$. Ce qui équivaut à $(m+1)(m-2) = 0$. Ainsi, $\overrightarrow{AC_m} \in \vec{\mathcal{P}}$ si et seulement si $m = -1$ ou $m = 2$.

4. Donner (selon les valeurs du paramètre réel m) la dimension du sous-espace affine Z_m.

   Solution: il s'agit de calculer le rang de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC_m})$, donc de la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & m^2 + 2m - 1 & 2m \end{pmatrix}$. On constate facilement que cette matrice est de rang 2 si et seulement si $m \neq -1$.
   En conclusion: $\dim(Z_m) = 1$ si $m = -1$, $\dim(Z_m) = 2$ si $m \neq -1$.

5. Selon les valeurs du paramètre réel m, donner une description (la plus complète possible) de l'intersection $\mathcal{P} \cap Z_m$.

   Solution: d'après les questions précédentes, si $m = -1$, on a $Z_m = (AB)$ et alors $Z_m \cap \mathcal{P} = \emptyset$. Si $m = 2$, alors on a $\dim(Z_m) = 2$, $\overrightarrow{Z_m} \subset \vec{\mathcal{P}}$ et $Z_m \cap \mathcal{P} = \emptyset$ car $A \notin \mathcal{P}$. Si $m \neq -1$ et $m \neq 2$, alors $\overrightarrow{AC_m} \notin \vec{\mathcal{P}}$, Z_m est un plan affine qui coupe $\mathcal{P}$ le long d'une droite parallèle à (AB).
