Université de Nice Sophia Antipolis — Licence L2 - Géométrie

Année 2012/2013 - semestre 4 -

Partiel du 26 mars 2013 (durée: 2h) - Barème (à titre indicatif): 4, 8, 8.

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Rédaction sobre et pertinente exigée.

Exercice 1. Soit X un espace affine réel de dimension 3 muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On note (x,y,z) les coordonnées d'un point M de X dans le repère $\mathcal{R}$ et on considère $\mathcal{P}$, le plan d'équation $3x+y-2z-3=0$.

1. Soient M_0 le point de coordonnées $(1,2,1)$ et $\mathcal{D}$ la droite passant M_0 et de vecteur directeur $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$. Expliquer pourquoi la droite $\mathcal{D}$ est contenue dans le plan $\mathcal{P}$.

2. Trouver sur le plan $\mathcal{P}$, quatre points non alignés A, B, C et D tels que $ABCD$ soit un parallélogramme (rappel: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$).

Exercice 2. Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan affine réel $\mathcal{P}$. On munit $\mathcal{P}$ du repère cartésien $\mathcal{R}=\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$. Soit m un paramètre réel tel que $m(m-1)\neq 0$. On note Ω le point de $\mathcal{P}$, de coordonnées $(m,1-m)$ dans le repère $\mathcal{R}$.

1. Vérifier que le point Ω se trouve sur la droite (BC) et que Ω est distinct de B et C.

2. On note h_Ω l'homothétie de centre Ω envoyant B sur C (c'est-à-dire $h_\Omega(B)=C$), $t_{\overrightarrow{AB}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis on pose $f=h_\Omega\circ t_{\overrightarrow{AB}}$ et $g=t_{\overrightarrow{AB}}\circ h_\Omega$.

   a) Donner (en fonction de m) le rapport de l'homothétie h_Ω.

   b) Montrer que f et g sont des homothéties. Préciser leurs rapports et les coordonnées (dans le repère $\mathcal{R}$) de leurs centres respectifs.

   c) Avec une valeur de m de votre choix ($m(m-1)\neq 0$), faire un dessin et y placer A, B, C, Ω et les centres des homothéties f et g.

Exercice 3. Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan affine réel $\mathcal{P}$. On munit $\mathcal{P}$ du repère cartésien $\mathcal{R}=\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$. Soient α, β, γ, μ des réels tels que $\mu\neq 0$ et $\alpha+\beta+\gamma+\mu\neq 0$. À tout point M de $\mathcal{P}$ on associe le point M', barycentre des points A, B, C et M affectés respectivement des poids α, β, γ et μ.

$$M'=\mathrm{Bar}((A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma),(M,\mu)).$$

On construit ainsi une application $f\colon\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{P};\ M\mapsto M'=f(M)$.

1. Montrer que si $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, alors le point $M_0=\mathrm{Bar}((A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma))$ est un point fixe de f.

2. Montrer que si $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, alors f est une homothétie dont on précisera (en fonction de α, β, γ, μ) le rapport et les coordonnées du centre dans le repère $\mathcal{R}$.

3. Montrer que si $\alpha+\beta+\gamma=0$, alors f est une translation de vecteur $\vec{v}$ dont on précisera les coordonnées dans la base $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

4. Soient f_1 et f_2 les deux applications de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ définies par

$$\forall M\in\mathcal{P},\quad f_1(M)=\mathrm{Bar}((A,3),(B,-1),(C,-1),(M,1)),\quad f_2(M)=\mathrm{Bar}((A,1),(B,-3),(C,1),(M,2)).$$

   a) Donner une description (la plus complète possible) de f_1 et f_2.

   b) Que peut-on dire des applications $f_2\circ f_1$ et $f_1\circ f_2$? (Donner une description la plus complète possible de ces deux applications).