Université de Nice Sophia Antipolis — Licence L2 - Géométrie

Année 2012/2013 - semestre 4 -

Partiel du 4 juin 2013 (durée: 2h) - Barème (à titre indicatif): 6, 6, 10.

Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. Il sera tenu compte de la rédaction dans la notation des copies. Vos résultats doivent être accompagnés de justifications sobres et pertinentes.

Exercice 1. Dans le plan affine euclidien usuel on considère trois points non alignés A, B et C. On note f la symétrie centrale de centre A et g la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
On pose $h_1 = f \circ g$ et $h_2 = g \circ f$.

1. Expliquer comment décomposer la translation g en la composée de deux symétries centrales.
2. Montrer que h_1 et h_2 sont des symétries centrales et préciser comment on construit leurs centres respectifs.
3. Faire un dessin propre et y placer les points $h_1(A)$, $h_1(B)$, $h_1(C)$, $h_2(A)$, $h_2(B)$ et $h_2(C)$.

Exercice 2. Soient X un espace affine euclidien orienté de dimension 3 muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et m un paramètre réel.
On considère f_m: $X \longrightarrow X$ l'application affine qui à un point M de coordonnées (x, y, z) dans le repère $\mathcal{R}$ associe le point M' de coordonnées (x', y', z') dans le même repère, données par:

$$(x', y', z') = (y + m, -z + 2, -x - m).$$

1. Donner la matrice de la partie linéaire $\overrightarrow{f_m}$ de f_m, dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\vec{X}$.
2. Montrer que f_m est une isométrie positive.
3. On note $\mathcal{F}_m$ l'ensemble des points fixes de f_m.
   a) Montrer que $\mathcal{F}_m$ est non vide si et seulement si $m = -1$. Donner ensuite une description la plus complète possible de $\mathcal{F}_{-1}$.
   b) On suppose que $\mathcal{F}_m$ est non vide. Montrer qu'alors $f_m^3 = \mathrm{Id}_X$ (*où* $f_m^3 = f_m \circ f_m \circ f_m$) et préciser la nature de l'isométrie f_m.
   c) A-t-on encore $f_m^3 = \mathrm{Id}_X$ lorsque $\mathcal{F}_m$ est vide? Justifiez votre réponse.

Exercice 3. Le plan affine euclidien usuel $\mathcal{P}$ est supposé orienté et muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère une rotation plane ρ de centre A et d'angle θ ($\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$) et une translation $t_{\vec{v}}$ de vecteur non nul $\vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}$. On pose $f = \rho \circ t_{\vec{v}}$ et on note $\vec{f}$ la partie linéaire de f.

1. Donner la matrice de $\vec{f}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\vec{\mathcal{P}}$.
2. Calculer le polynôme caractéristique de $\vec{f}$ et dire pourquoi au vu de ce polynôme, on peut affirmer que f admet un et un seul point fixe.
3. Montrer qu'il existe trois droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ telles que $\rho = s_{\mathcal{D}_3} \circ s_{\mathcal{D}_2}$ et $t_{\vec{v}} = s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$ (où $s_{\mathcal{D}_i}$ désigne la réflexion d'axe $\mathcal{D}_i$). Que peut-on dire de la transformation affine f?
4. On suppose que A est le point de coordonnées $(1, 1)$, ρ la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, $t_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$. On pose $f = \rho \circ t_{\vec{v}}$.
   a) Expliciter pour cette transformation f, les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ de la question 3.
   b) Donner une description la plus complète possible de la transformation f.
   c) Faire un dessin propre, y tracer les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ (de la question précédente) et y placer les points O, A, $f(O)$ et $f(A)$.
