Université de Nice Sophia Antipolis — Licence L2 - Géométrie

Année 2013 - 2014 - semestre 4 -

Corrigé succinct du contrôle du 25 mars 2014

Exercice 1. Soient X un espace affine réel de dimension au moins 3, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_4$ quatre droites dans X. On suppose que ces quatre droites sont deux à deux sécantes (c'est-à-dire: pour tous indices i, j distincts, les droites $\mathcal{D}_i$ et $\mathcal{D}_j$ ont un et un seul point en commun).

Montrer que ces quatre droites sont soit concourantes soit coplanaires.

Solution: cet exercice se trouve sur la première feuille de TD (exercice n°9) et a été corrigé en séance.

Exercice 2. Soient A, B et C trois points non alignés d'un espace affine réel X de dimension au moins 2.
À tout point M de X on associe le point M', barycentre des points A, B, C, M affectés respectivement des poids -1, 1, 2 et -3. On définit ainsi une application $f: X \longrightarrow X$;

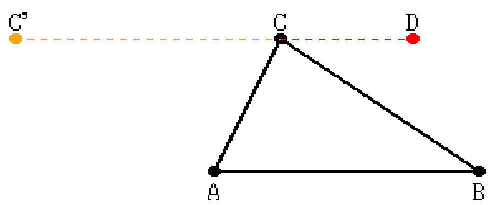
$$\boldsymbol{f(M) = \mathrm{Bar}((A,-1),(B,1),(C,2),(M,-3))}.$$

1. Quelle est l'image de C par f?

   Solution: posons $C' = f(C)$. On a par définition $-\overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{C'B} + 2\overrightarrow{C'C} - 3\overrightarrow{C'C} = \vec{0}$, d'où $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{C'C}$.
   C' se déduit donc de C par la translation de vecteur $-\overrightarrow{AB}$ ($ABCC'$ est un parallélogramme).

2. On note D le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des poids -1, 1 et 2.
   Faire un dessin et y placer les points A, B, C, D et $f(C)$.

   Solution: par définition, nous avons $-\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$, ou encore $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$. D se déduit donc de C par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



3. Montrer que f est une homothétie. Préciser le centre et le rapport de cette homothétie.

   Solution: par associativité du barycentre, nous avons $f(M) = M' = \mathrm{Bar}((D,2),(M,-3))$.
   Ainsi, $2\overrightarrow{M'D} - 3\overrightarrow{M'M} = \vec{0}$, donc $-\overrightarrow{M'D} - 3\overrightarrow{DM} = \vec{0}$. On en déduit $\overrightarrow{DM'} = 3\,\overrightarrow{DM}$.
   f est donc l'homothétie de centre D et de rapport 3.

4. Quelle est l'image de la droite (BC) par f?

   Solution: nous savons que $f(C) = C'$ et que $\overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{AB}$. f étant une homothétie, l'image de (BC) par f est la droite parallèle à (BC) passant par C'. L'image de (BC) est donc la droite parallèle à (BC) et passant par A.

5. Déterminer $f^{-1}(A)$.

   Solution: on sait que A, $f^{-1}(A)$ et D (centre de f) sont alignés. Comme (BC) a pour image (AC'), $f^{-1}(A)$ est le point d'intersection des droites (AD) et (BC).

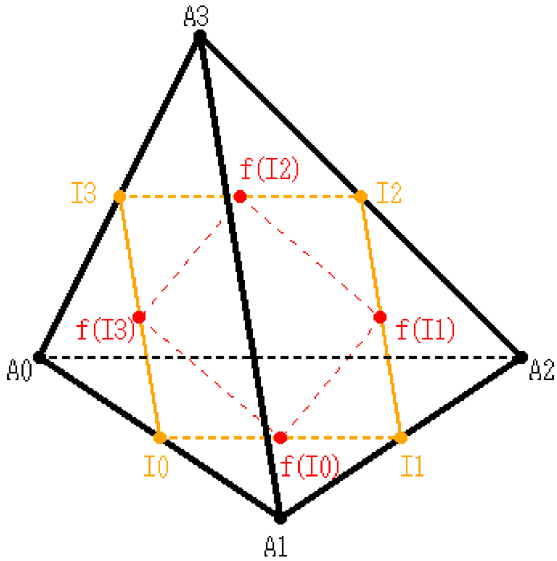
Exercice 3. Soit X un espace affine réel de dimension 3 muni d'un repère affine $\mathcal{R} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$.
On note I_0, I_1, I_2 et I_3 les milieux respectifs des segments $[A_0A_1]$, $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, $[A_3A_0]$ et on définit une application affine $f: X \longrightarrow X$ en posant $f(A_0) = I_0$, $f(A_1) = I_1$, $f(A_2) = I_2$, $f(A_3) = I_3$.

1. Montrer que $I_0I_1I_2I_3$ est un parallélogramme.

   Solution: en utilisant le théorème du milieu on trouve que $\overrightarrow{I_0I_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_2}$ et $\overrightarrow{I_3I_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_2}$. Nous avons donc $\overrightarrow{I_0I_1} = \overrightarrow{I_3I_2}$, ce qui signifie que $I_0I_1I_2I_3$ est un parallélogramme.

2. Faire un dessin de la configuration et y placer les points $f(I_0)$, $f(I_1)$, $f(I_2)$, $f(I_3)$.

   Solution: f étant une application affine, le milieu I_0 du segmet $[A_0A_1]$ a pour image $f(I_0)$, milieu du segment $[f(A_0)f(A_1)] = [I_0I_1]$. De manière analogue, on voit que $f(I_1)$ est le milieu de $[I_1I_2]$, $f(I_2)$ le milieu de $[I_2I_3]$ et enfin $f(I_3)$ le milieu de $[I_3I_0]$.



3. Quelle est la matrice de $\vec{f}$ dans la base $\left(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \overrightarrow{A_0A_3}\right)$ de $\vec{X}$?

   Solution: par définition de f, $\vec{f}\left(\overrightarrow{A_0A_1}\right) = \overrightarrow{I_0I_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_2}$, $\vec{f}\left(\overrightarrow{A_0A_2}\right) = \overrightarrow{I_0I_2}$, $\vec{f}\left(\overrightarrow{A_0A_3}\right) = \overrightarrow{I_0I_3}$. Comme $\overrightarrow{I_0I_2} = \overrightarrow{I_0I_1} + \overrightarrow{I_1I_2}$ et que (théorème du milieu) $\overrightarrow{I_1I_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_3} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}$, on trouve que $\vec{f}\left(\overrightarrow{A_0A_2}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}$. En utilisant encore le théorème du milieu on a $\overrightarrow{I_0I_3} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_3}$, d'où $\vec{f}\left(\overrightarrow{A_0A_3}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}$.

   Dans la base $\left(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \overrightarrow{A_0A_3}\right)$ de $\vec{X}$, $\vec{f}$ a donc pour matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4. Décrire l'ensemble des points fixes de f.

   Solution: M est un point fixe de f si et seulement si $f(M) = M$. Ce qui s'écrit $\overrightarrow{A_0f(M)} = \overrightarrow{A_0M}$, ou encore $\overrightarrow{A_0f(A_0)} + \vec{f}\left(\overrightarrow{A_0M}\right) = \overrightarrow{A_0M}$. En utilisant la matrice de $\vec{f}$ trouvée dans la question précédente, si M a pour coordonnées (x, y, z) dans le repère cartésien $\mathcal{R} = \left(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \overrightarrow{A_0A_2}\right)$, alors M est point fixe de f si et seulement si (x, y, z) est solution du système linéaire suivant: $\begin{cases} -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} & = x \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y & = y \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z & = z \end{cases}$.

   On trouve que ce système admet pour seule et unique solution qui est $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, correspondant aux coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$ de l'unique point fixe K de f. (K est l'isobarycentre du tétraèdre $A_0A_1A_2A_3$).

Exercice 4. Dans un plan affine réel $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(2, 0)$, $(0, 1)$, $(-4, 0)$ et $(0, -2)$ dans le repère $\mathcal{R}$. On note I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[CD]$.

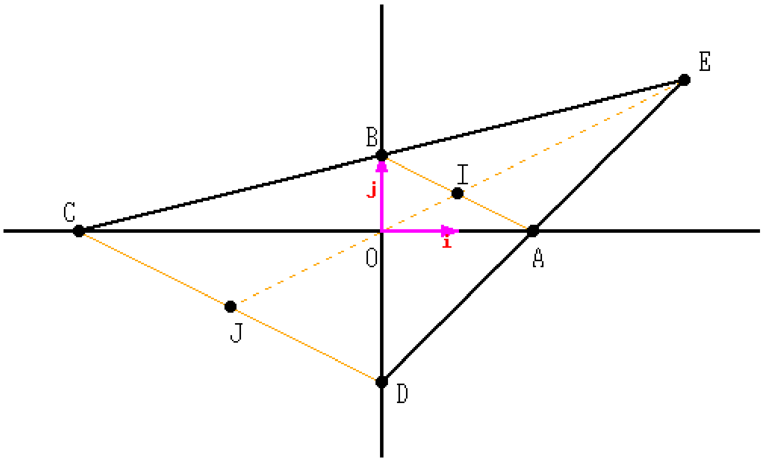
1. Montrer que les droites (AD) et (BC) sont sécantes en un point E dont on précisera les coordonnées.

   Solution: les droites (AD) et (BC) ont pour équations cartésiennes respectives $x - y - 2 = 0$ et $x - 4y + 4 = 0$. On vérifie facilement que ces deux droites ont en commun un et un seul point E, de coordonnées $(4, 2)$.

2. Que peut-on dire des droites (AB) et (CD)?

   Solution: nous avons $\overrightarrow{AB} = -2\vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{CD} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$. On constate que $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$, donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

3. Faire un dessin et y placer les points O, A, B, C, D, E, I, J.



4. On note h_1 l'homothétie de centre O qui envoie A sur C ($h_1(A) = C$), h_2 l'homothétie de centre E qui envoie C sur B ($h_2(C) = B$). On pose $f = h_2 \circ h_1$ et $g = h_1 \circ h_2$.

   a) Quels sont les rapports des homothéties h_1 et h_2?

   Solution: nous avons $\overrightarrow{OC} = -2\overrightarrow{OA}$, donc h_1 est de rapport $\lambda_1 = -2$. De même, on vérifie facilement que $\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$, donc h_2 est de rapport $\frac{1}{2}$.

   b) Déterminer $f(A)$, $f(B)$, $g(C)$, $g(D)$.
   En déduire que I est un point fixe de f et J un point fixe de g.

   Solution: nous avons par définition de f, $f(A) = B$. Les droites (AB) et (CD) étant parallèles, on a $h_1(B) = D$. Comme $h_2(C) = B$, on en déduit que $h_2(D) = A$. Ainsi, $f(A) = B$ et $f(B) = A$, ce qui entraîne, f étant une application affine, que le milieu I du segment $[AB]$ est invariant par f. De manière analogue on montre que le milieu J du segment $[CD]$ est invariant par g.

   c) Donner une description la plus complète possible de chacune des applications affines f et g.

   Solution: d'après les questions a) et b) ci-dessus, f et g sont des homothéties de rapport -1. Ce sont donc des symétries centrales. f est la symétrie centrale de centre I, g la symétrie centrale de centre J.
