Corrigé succinct du contrôle final du 5 juin 2014

Exercice 1. Le plan affine euclidien usuel $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. On note (x, y) les coordonnées d'un point M par rapport à ce repère. Soient $\mathcal{D}$ la droite affine d'équation $x - 2y + 3 = 0$ et $s_{\mathcal{D}}$ la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}$.

1. Donner les coordonnées (dans le repère $\mathcal{R}$) du point $O' = s_{\mathcal{D}}(O)$.

   Solution: soit N le projeté orthogonal de O sur $\mathcal{D}$. On a $\overrightarrow{ON} = \lambda \vec{n}$, où $\vec{n} = \vec{i} - 2\vec{j}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$. N a donc pour coordonnées $(\lambda, -2\lambda)$ et la condition $N \in \mathcal{D}$ donne $\lambda = -\frac{3}{5}$. Comme $\overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{ON}$, O' a pour coordonnées $\left(-\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

2. Donner la matrice de la partie linéaire $\vec{s_{\mathcal{D}}}$ de $s_{\mathcal{D}}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\vec{\mathcal{P}}$.

   Solution: $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + \vec{j}$. Le vecteur $\vec{v}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j}$ et orthogonal à $\mathcal{D}$ et dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ de $\vec{\mathcal{P}}$, $\vec{s_{\mathcal{D}}}$ a pour matrice $S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice faisant passer de $(\vec{i}, \vec{j})$ à $\mathcal{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Si S est la matrice de $\vec{s_{\mathcal{D}}}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, on a $S = PS'P^{-1}$, donc $S = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Soient α et β deux nombres réels. On pose $\vec{v} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$, on note $t_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $\vec{v}$ et on pose $f = t_{\vec{v}} \circ s_{\mathcal{D}}$.

   a) Que peut-on dire de la partie linéaire $\vec{f}$ de f?

   Solution: comme $t_{\vec{v}}$ a pour partie linéaire $\mathrm{Id}_{\vec{\mathcal{P}}}$, on a $\vec{f} = \vec{s_{\mathcal{D}}}$.

   b) Si M a pour coordonnées (x, y), donner en fonction de x, y, α, β, les coordonnées (x', y') (dans le repère $\mathcal{R}$) du point $f(M)$.

   Solution: on a $\overrightarrow{Of(M)} = \overrightarrow{Of(O)} + \vec{f}(\overrightarrow{OM})$. En utilisant la question 1., on trouve que $\overrightarrow{Of(O)} = \left(-\frac{6}{5} + \alpha\right)\vec{i} + \left(\frac{12}{5} + \beta\right)\vec{j}$. On en déduit en utilisant la question 2., que $\overrightarrow{Of(M)} = \left(-\frac{6}{5} + \alpha + \frac{3x + 4y}{5}\right)\vec{i} + \left(\frac{12}{5} + \beta + \frac{4x - 3y}{5}\right)\vec{j}$,
   donc $(x', y') = \left(\alpha + \frac{3x + 4y - 5}{5}, \beta + \frac{4x - 3y + 12}{5}\right)$.

   c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur (α, β) pour que f admette au moins un point fixe. Que peut-on dire de l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ pour lesquels f admet au moins un point fixe?

   Solution: f admet au moins un point fixe si et seulement si le système suivant admet au moins une solution: $\begin{cases} \alpha + \frac{3x + 4y}{5} = x \\ \beta + \frac{4x - 3y}{5} = y \end{cases}$. Ce qui équivaut à $\begin{cases} -2x + 4y + 5\alpha = 0 \\ 4x - 8y + 5\beta = 0 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} -2x + 4y + 5\alpha = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases}$. Une condition nécessaire et suffisante sur (α, β) pour que f admette au moins un point fixe est donc que $2\alpha + \beta = 0$. On constate que l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ pour lesquels f admet au moins un point fixe n'est autre que $\vec{\mathcal{D}}^{\perp}$.

   d) Décrire l'ensemble des points fixes de f s'il est non vide.

   Solution: l'ensemble des points fixes de f, lorsqu'il est non vide, est la droite d'équation $-2x + 4y + 5\alpha = 0$. C'est une droite parallèle à $\mathcal{D}$.

Exercice 2. Soient X un espace affine euclidien de dimension au moins 2, A et B deux points distincts de X. On note I le milieu du segment $[AB]$ et on pose $R = \| \overrightarrow{IA} \|$.

1. Montrer que pour tout point M de X, on a $<\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}> = \| \overrightarrow{IM} \|^2 - R^2$ ($<\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}>$ désigne le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$).

   Solution: par la relation de Chasles, $<\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}> = <\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}, \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}>$. Comme $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$, $<\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}> = <\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}, \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}> = \| \overrightarrow{IM} \|^2 - R^2$.

2. On suppose que $\dim(X) = 2$.

   a) Pour k un nombre réel fixé, décrire le lieu Γ_k des points M tels que $<\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}> = k$.

   Solution: d'après la question 1., on a $<\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}> = k$ si et seulement si $\| \overrightarrow{IM} \|^2 - R^2 = k$, c'est-à-dire $\| \overrightarrow{IM} \|^2 = R^2 + k$. Si $R^2 + k < 0$, alors Γ_k est vide. Si $R^2 + k \geqslant 0$, alors Γ_k est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{R^2 + k}$. En particulier, Γ_0 est le cercle de diamètre $[AB]$.

   b) Soit $\mathcal{D}$ une droite affine de X ne passant pas par A. À tout point N de $\mathcal{D}$ on associe le point N', projeté orthogonal de B sur la droite (AN).
   Quel est le lieu des points N' lorsque N parcourt $\mathcal{D}$?

   Solution: par définition de N', nous avons $<\overrightarrow{N'A}, \overrightarrow{N'B}> = 0$. N' est donc sur le cercle (Γ_0) de diamètre $[AB]$. Soit Δ la droite parallèle à $\mathcal{D}$ et passant par A. Si Δ n'est pas tangente à Γ_0 en A, alors Δ coupe Γ_0 en un autre point C. Lorsque N parcourt $\mathcal{D}$, le point N' parcourt $\Gamma_0 \setminus \{A\}$ si Δ est tangente à Γ_0 ou $\Gamma_0 \setminus \{C\}$ si Δ n'est pas tangente Γ_0.

Exercice 3. Dans un espace affine réel X de dimension au moins 2, on considère trois points non alignés A_1, A_2 et A_3. Soient λ_1, λ_2, λ_3 trois nombres réels non nuls et distincts de 1. On note h_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ l'homothétie de centre A_i et de rapport λ_i, $t_{\overrightarrow{A_1A_2}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$.

1. Pour quels nombres réels λ_1, λ_2 a-t-on $h_1 \circ h_2 = t_{\overrightarrow{A_1A_2}}$?

   Solution: on a $h_1 \circ h_2 = t_{\overrightarrow{A_1A_2}}$ si et seulement si $\lambda_1\lambda_2 = 1$ et $\overrightarrow{A_2h_1(h_2(A_2))} = \overrightarrow{A_1A_2}$. En utilisant la relation de Chasles et la définition de h_1, $\overrightarrow{A_2h_1(h_2(A_2))} = \overrightarrow{A_2A_1} + \lambda_1 \overrightarrow{A_1A_2}$.
   On en déduit que $h_1 \circ h_2 = t_{\overrightarrow{A_1A_2}}$ si et seulement si $\lambda_1\lambda_2 = 1$ et $\overrightarrow{A_2A_1} + \lambda_1 \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1A_2}$.
   Ce qui équivaut à $(\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = \frac{1}{2})$.

2. On suppose que $h_1 \circ h_2 = t_{\overrightarrow{A_1A_2}}$. Décrire $h_2 \circ h_1$

   Solution: on suppose que $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. On a alors $\lambda_1\lambda_2 = 1$, donc $h_2 \circ h_1$ est une translation. $h_2 \circ h_1$ est alors une translation de vecteur $\overrightarrow{A_1h_2(A_1)} = \overrightarrow{A_1A_2} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_2A_1}$.
   Conclusion si $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, alors $h_2 \circ h_1$ est la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_2}$.

3. Montrer que $t_{\overrightarrow{A_1A_2}} \circ h_3$ est une homothétie et préciser comment calculer son centre à partir de A_3, λ_3 et $\overrightarrow{A_1A_2}$.

   Solution: on a $\overrightarrow{t_{\overrightarrow{A_1A_2}} \circ h_3} = \lambda_3 \mathrm{Id}_{\vec{X}}$. Comme $\lambda_3 \neq 1$, $t_{\overrightarrow{A_1A_2}} \circ h_3$ est une homothétie de rapport λ_3.
   Pour trouver le centre de cette homothétie on résout l'équation $t_{\overrightarrow{A_1A_2}} \circ h_3(M) = M$. Cette équation équivaut à $\overrightarrow{A_3M} = \overrightarrow{A_3t_{\overrightarrow{A_1A_2}}(h_3(M))}$, ou encore $\overrightarrow{A_3M} = \overrightarrow{A_3h_3(M)} + \overrightarrow{A_1A_2}$. Comme $\overrightarrow{A_3h_3(M)} = \lambda_3 \overrightarrow{A_3M}$, on obtient $\overrightarrow{A_3M} = \frac{1}{1-\lambda_3}\overrightarrow{A_1A_2}$.

4. Pour $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \left(2, \frac{1}{2}, 2\right)$, décrire $h_1 \circ h_2 \circ h_3$.

   Solution: d'après la question précédente, $h_1 \circ h_2 \circ h_3$ est l'homothétie de rapport 2 et de centre N où N est défini par $\overrightarrow{A_3N} = -\overrightarrow{A_1A_2}$. N est donc le point tel que $A_1A_2A_3N$ est un parallélogramme.
