Chapitre 1
Géométrie affine

On travaillera avec un corps de base K qui sera $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le plus souvent ce sera $\mathbb{R}$.

1.1 Espaces affines - Généralités

Définition 1.1.
Un espace affine est un objet mathématique consistant en la donnée de:

- *un ensemble* X
- *un* K*-espace vectoriel* E
- *une application* $\Phi\colon X\times X\longrightarrow E$*, qui à tout* $(A,B)\in X\times X$ *associe* $\Phi(A,B)=\overrightarrow{AB}$ *et vérifiant les propriétés suivantes:*
    1. ***(relation de Chasles)*** *Quels que soient* A,B,C *appartenant à* X*, on a* $\Phi(A,B)+\Phi(B,C)=\Phi(A,C)$*, c'est-à-dire* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$*.*
    2. *Pour tout* $A\in X$ *fixé, l'application partielle* $\Phi_A\colon X\longrightarrow E$ *définie par* $\Phi_A(B)=\overrightarrow{AB}$ *est une bijection.*

Les éléments de X *sont appelés* ***points****, l'espace vectoriel* E *est appelé* ***direction*** *de* X *et noté* $\vec{\boldsymbol{X}}$*. La dimension de l'espace affine est la dimension de l'espace vectoriel* $\vec{X}$*. Si le contexte ne prête à aucune ambiguïté, on dira par abus,* soit X un espace affine *(sous-entendu, muni de la structure décrite ci-dessus). On convient que l'ensemble vide est un espace affine de direction quelconque.*

Exemple 1.2. Soit E un K-espace vectoriel. E est naturellement muni d'une structure d'espace affine où $\vec{E}=E$ et $\Phi\colon E\times E\longrightarrow E$ est définie par $\Phi(u,v)=v-u$.

On vérifie facilement que pour tous $u,v,w\in E$,
$\Phi(u,v)+\Phi(v,w)=(v-u)+(w-v)=w-u=\Phi(u,w)$
et que pour tout u fixé, l'application $\Phi_u\colon E\longrightarrow E$, $v\mapsto\Phi_u(v)=v-u$ est une bijection.
En particulier le corps de base K a une structure naturelle d'espace affine de dimension 1.
Si n est un entier naturel non nul, $\mathbb{R}^n$ a structure naturelle d'espace affine de dimension n.

Il faut faire bien attention que pour cette structure naturelle d'espace affine, chaque élément de E a deux "casquettes": la "casquette" point et la "casquette" vecteur.

Remarque 1.3. Soit X un espace affine (de corps de base K). De la relation de Chasles on obtient immédiatement les règles de calculs suivantes:

1. $\forall A\in X, \overrightarrow{AA}=\vec{0}$
2. $\forall A,B\in X, \overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$
3. $\forall A,B,A',B'\in X$, on a $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}\Longleftrightarrow\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$ **(règle du parallélogramme)**

Note 1.4. (vectorialisation) Soit X un espace affine non vide de corps de base K. Par le choix (arbitraire) d'un point $A_0\in X$, $\Phi_{A_0}\colon X\longrightarrow\vec{X}$ étant une bijection, on peut munir X d'une structure de K-espace vectoriel en posant:

1. Pour tous $M,N\in X$, $M+N$ est l'unique point $P\in X$ tel que $\overrightarrow{A_0M}+\overrightarrow{A_0N}=\overrightarrow{A_0P}$.
2. Pour tout $M\in X$, pour tout $\lambda\in K$, λM est l'unique point $P\in X$ tel que $\lambda\overrightarrow{A_0M}=\overrightarrow{A_0P}$.

On dit que l'on a vectorialisé l'espace affine X par le choix d'une origine en A_0 (qui devient ainsi le vecteur nul dans cette structure d'espace vectoriel).

1.2 Sous espaces affines

Soit X un espace affine. On discute ici de la possibilité de munir un sous-ensemble Z de X, d'une structure d'espace affine, héritée de celle de X. Si Z est vide, on peut lui associer une direction arbitraire, sous-espace vectoriel de $\vec{X}$. Si Z est non vide, on devrait trouver un sous-espace vectoriel, notons le F, de $\vec{X}$ tel que la structure affine soit définie en utilisant la restriction de Φ à $Z \times Z$. $\Phi_Z: Z \times Z \longrightarrow F$ est donc définie par: $\forall A, B \in Z, \Phi_Z(A, B) = \Phi(A, B) = \overrightarrow{AB}$. Dans ce cas, par définition de Φ_Z, la relation de Chasles est automatiquement vérifiée pour tous $A, B, C \in Z$. Il ne reste plus qu'à imposer que pour tout point A fixé dans Z, l'application Φ_A: $Z \longrightarrow F$ est une bijection.

En résumé, nous pourrons munir le sous-ensemble non vide Z d'une structure affine héritée de celle de X si et seulement si pour tout $A \in Z$ fixé, l'ensemble de vecteurs $\overrightarrow{AM}$ lorsque M parcourt Z, décrit un sous-espace vectoriel de $\vec{X}$. Compte tenu de la relation de Chasles, cela revient aussi à dire qu'il existe $A_0 \in Z$ tel que l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{A_0M}$ lorsque M parcourt Z est un sous-espace vectoriel de $\vec{X}$. En effet, on peut montrer que les deux énoncés suivants sont équivalents (Z est supposé non vide):

a) Pour tout $A \in Z$, l'ensemble $F_A = \left\{\overrightarrow{AM}, M \in Z\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{X}$.

b) Il existe $A_0 \in Z$ tel que l'ensemble $F_{A_0} = \left\{\overrightarrow{A_0M}, M \in Z\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{X}$.

a)$\Rightarrow$b) est évident.
Supposons b) et montrons que pour tout $A \in Z$, on a $F_A = F_{A_0}$. On montre pour commencer, l'inclusion $F_A \subset F_{A_0}$: pour tout $M \in Z$, on a $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA_0} + \overrightarrow{A_0M} = -\overrightarrow{A_0A} + \overrightarrow{A_0M}$ et comme F_{A_0} est un sous-espace vectoriel, on en déduit que $\overrightarrow{AM} \in F_{A_0}$. Reste à prouver que $F_{A_0} \subset F_A$. Cela veut dire que pour tout $M \in Z$, il existe $N \in Z$ tel que $\overrightarrow{A_0M} = \overrightarrow{AN}$. En utilisant la relation de Chasles, on se ramène à résoudre l'équation $\overrightarrow{A_0M} = \overrightarrow{AA_0} + \overrightarrow{A_0N}$ où l'inconnue est N. En utilisant la relation de Chasles, on se ramène à résoudre l'équation $\overrightarrow{A_0M} = \overrightarrow{AA_0} + \overrightarrow{A_0N}$ où l'inconnue est N. Compte tenu du fait que F_{A_0} est un sous-espace vectoriel de $\vec{X}$, on voit tout de suite que N est l'unique point de Z vérifiant $\overrightarrow{A_0N} = \overrightarrow{A_0A} + \overrightarrow{A_0M}$.

Définition 1.5. *Soient X un espace affine de corps de base K, Z un sous ensemble non vide de X. On dit que Z est un sous-espace affine de X s'il existe un point A_0 dans Z tel que l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{A_0M}$ lorsque M parcourt Z est un sous-espace vectoriel de $\vec{X}$.*

Ce sous-espace vectoriel est appelé direction de Z et noté $\vec{Z}$.

Remarque 1.6. (à retenir) Soit X un espace affine. Tout sous-espace affine de X est entièrement déterminé par la donnée d'un de ses points et de sa direction (sous-espace vectoriel de $\vec{X}$).

Exemple 1.7.

1. Soit X un espace affine non vide. Tout point de X est un sous-espace affine de direction le sous-espace trivial $\{0_{\vec{X}}\}$ de $\vec{X}$.
2. Soit X un espace affine de dimension au moins 2, A un point de X, $\vec{D}$ une droite vectorielle de $\vec{X}$. Alors l'ensemble $D = \left\{M \in X / \overrightarrow{AM} \in \vec{D}\right\}$ est un sous-espace affine de X appelé droite affine passant par A et de direction $\vec{D}$.
3. Soit X un espace affine de dimension au moins 3, A un point de X, $\vec{\mathcal{P}}$ un plan vectoriel de $\vec{X}$. Alors l'ensemble $\mathcal{P} = \left\{M \in X / \overrightarrow{AM} \in \vec{\mathcal{P}}\right\}$ est un sous-espace affine de X appelé plan affine passant par A et de direction $\vec{\mathcal{P}}$.
4. Soient E et F deux K-espaces vectoriels, munis chacun de sa structure affine naturelle. Soit $f: E \longrightarrow F$ une application linéaire, alors on peut facilement vérifier que pour tout $v \in F$, l'image réciproque de v, $f^{-1}(v) = \{u \in E / f(u) = v\}$ est un sous-espace affine de E, de direction $\mathrm{Ker}(f)$.
   Prenons par exemple $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}$ et f la forme linéaire définie par $f(x, y, z) = x - 2y + 3z$. Alors $f^{-1}(1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + 3z = 1\}$ est un plan affine $\mathcal{P}$ de direction le plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$ d'équation $x - 2y + 3z = 0$.