3.2 Angles orientés de droites

Soient D_1 et D_2 deux droites vectorielles admettant respectivement pour vecteurs directeurs unitaires, v_1 et v_2. Si r_θ est une rotation vectorielle d'angle θ telle $r_\theta(D_1) = D_2$, alors on a soit $r_\theta(v_1) = v_2$, soit $r_\theta(v_1) = -v_2$. On en déduit qu'il existe exactement deux rotations vectorielles qui envoient D_1 sur D_2.
Si $(v_1, v_2) = \theta$, on a $(v_1, -v_2) = \theta + \pi$ et les deux rotations sont r_θ et $r_{(\theta+\pi)}$.

Définition 3.7. (angles orientés de droites vectorielles)
Soient D_1 et D_2 deux droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$. On appelle angle orienté de D_1 et D_2, noté (D_1, D_2), toute rotation ρ telle que $\rho(D_1) = D_2$.
La mesure de l'angle $(D_1,\ D_2)$ est définie à un multiple entier de π près. Par commodité, on notera encore (D_1, D_2) une mesure quelconque de l'angle orienté de D_1 et D_2.

En utilisant les définitions d'angles de droites et d'angles de vecteurs on montre facilement la proposition suivante:

Proposition 3.8. *Soient D_1, D_2, Δ_1 et Δ_2 quatre droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$ admettant respectivement pour vecteurs directeurs unitaires v_1, v_2, w_1 et w_2.*
Alors on a pour les mesures des angles, $(D_1, D_2) = (\Delta_1, \Delta_2) \pmod{\pi}$ si et seulement si $2(v_1, v_2) = 2(w_1, w_2) \pmod{2\pi}$.

Proposition 3.9. *Soient D_1 et D_2 deux droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, s_{D_1}, s_{D_2} les réflexions par rapport aux droites D_1 et D_2, θ une mesure de l'angle (D_1, D_2).*
Alors on a $s_{D_2} \circ s_{D_1}$ est la rotation vectorielle d'angle 2θ.

Définition 3.10. (angles orientés de droites affines) *Soient $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ deux droites affines du plan affine euclidien usuel. Par définition, l'angle orienté $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ est l'angle orienté $(\vec{\mathcal{D}}_1, \vec{\mathcal{D}}_2)$.*

Définition 3.11. (rotation affine) *Une rotation affine dans le plan affine euclidien usuel est une isométrie f admettant un point fixe ω et telle que $\vec{f}$ est une rotation vectorielle. Supposant le plan muni d'un repère orthonormé direct, si $\vec{f}$ est une rotation vectorielle d'angle θ, on parle de rotation de centre ω et d'angle θ. Ainsi par définition, si f est une rotation (plane) de centre ω et d'angle θ, pour tout point M du plan usuel, on a $\overrightarrow{\omega f(M)} = r_\theta(\overrightarrow{\omega M})$ où r_θ est la rotation vectorielle d'angle θ.*

Proposition 3.12. *Soient A un point du plan euclidien usuel, θ un nombre réel (non nul), $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites affines passant par A et telles que l'angle orienté de droites $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ ait pour mesure $\frac{\theta}{2}$. Alors la composée $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$ des réflexions par rapport à ces deux droites est la rotation de centre A et d'angle θ.*

3.3 Cocyclicité

Proposition 3.13. (somme des angles aux sommets d'un triangle) *Soient A, B et C trois points non alignés du plan affine euclidien usuel. Alors on a, pour les mesures des angles orientés de vecteurs,* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \pi \pmod{2\pi}$.

Démonstration. Soient I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[AC]$. Les symétries centrales s_I et s_J sont des isométries positives. Elles conservent donc les angles orientés.
Notons $D = s_I(C)$ et $E = s_J(B)$. On a $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$.
On utilise ensuite la relation de Chasles (faire un dessin):
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
Comme A est milieu de $[AE]$, on obtient $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) = \pi \pmod{2\pi}$. □

On vérifie facilement que la proposition précédente reste vraie si les trois points A, B et C sont alignés. Faire un dessin pour s'en convaincre.

Proposition 3.14. (angle au centre) *Soient A, B et M trois points non alignés du plan affine euclidien usuel, $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABM. Soit O le centre du cercle $\mathcal{C}$. Alors on a* $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \pmod{2\pi}$.

Démonstration. (Faire un dessin) Soient $\mathcal{D}_1$ la médiatrice de $[MA]$, $\mathcal{D}_2$ la médiatrice de $[MB]$ et $\mathcal{D}_3$ la médiatrice de $[AB]$. Notons s_1 (resp. s_2, s_3) la réflexion par rapport à $\mathcal{D}_1$ (resp. $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$). Les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ passent par le point O. s_1, s_2 et s_3 transforment les angles en leurs opposés.

Par la relation de Chasles nous avons $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB})$. Comme $s_1(M) = A$ et $s_1(O) = O$, on a $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) = -(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AO}) = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM})$. De même, comme $s_2(M) = B$ et $s_2(O) = O$, on a $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) = -(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BO})$.
De manière analogue, on a $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA})$.

Ainsi, $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BO})$.
Dans le triangle ABM, on a $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi \ (2\pi)$.
Par la relation de Chasles,

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM})$ et $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BO}) + (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA})$.

On en déduit pour le triangle ABM,

$2\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) + 2(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}) + 2(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BO}) = \pi \ (2\pi)$,

ou encore $2\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) + 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi \ (2\pi)$.
Pour le triangle ABO nous avons $2\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \pi \ (2\pi)$.

On en déduit immédiatement que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$. □

Dans la proposition 3.14, lorsque le point M tend vers A, la droite AM tend vers la tangente au cercle en A, c'est-à-dire la perpendiculaire à AO par A.
On obtient la version "limite" suivante de la proposition 3.14.

Proposition 3.15. *Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, A, B deux points distincts de $\mathcal{C}$. Soient $\mathcal{T}$ la perpendiculaire à AO en A, N un point de $\mathcal{T}$, distinct de A.*

Alors on a $2(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \pmod{2\pi}$.

Démonstration. Faire un dessin et s'inspirer de la preuve de la proposition 3.14. □

Avec les résultats précédents on peut prouver:

Théorème 3.16. *Soient A et B deux points distincts du plan usuel, θ un nombre réel. Alors le lieu des points M du plan usuel tels que* $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\theta}{2} \pmod{\pi}$ *est soit la droite AB privée de A et B soit un cercle passant par A et B et privé des points A et B.*