Résumé de la séance du 27 janvier 2015

1.3 Intersection de sous-espaces affines

Soient X un espace affine, Z_1, Z_2 deux sous-espaces affines de X. Supposons $Z_1 \cap Z_2$ non vide et considérons un point A dans cette intersection. Quel que soit $M \in X$, on a $M \in Z_1 \cap Z_2$ si et seulement si ($\overrightarrow{AM} \in \vec{Z_1}$ et $\overrightarrow{AM} \in \vec{Z_2}$), ce qui équivaut à $\overrightarrow{AM} \in \vec{Z_1} \cap \vec{Z_2}$. On vient ainsi de vérifier que $Z_1 \cap Z_2$ est un sous-espace affine de X de direction $\vec{Z_1} \cap \vec{Z_2}$.
Plus généralement, on a la proposition suivante:

Proposition 1.8. *Soient X un espace affine, $\{Z_i\}_{i \in I}$ une famille quelconque de sous-espaces affines de X. Alors l'intersection $\cap_{i \in I} Z_i$ est un sous-espace affine de X de direction $\cap_{i \in I} \vec{Z_i}$.*

Proposition 1.9. ***(sous-espace affine engendré par une partie)*** *Soit X un espace affine non vide, Γ une partie quelconque de X. Parmi les sous espaces affines de X contenant Γ, il en existe un plus petit (pour la relation d'inclusion) que tous les autres: c'est l'intersection de tous les sous-espaces affines de X contenant Γ. On l'appelle le sous-espace affine de X engendré par Γ et on le note $<\Gamma>$.*

Exemple 1.10.

1. Soit par exemple $\Gamma = \{M_1, \cdots, M_s\}$ une partie finie non vide d'un espace affine X. Notons E_Γ le sous espace vectoriel de $\vec{X}$ engendré par le système $\left\{\overrightarrow{M_1M_2}, \cdots, \overrightarrow{M_1M_s}\right\}$. Alors le sous-espace affine passant par M_1 et de direction E_Γ est le sous-espace affine de X engendré par Γ. On le note $<\Gamma>$.
2. Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, si Γ est la réunion d'une droite affine D et un point A pris en dehors de D, alors $<\Gamma>$ est un plan affine dans $\mathbb{R}^3$.

Définition 1.11. **(points affinement indépendants)** *Soit X un espace affine non vide. On dit qu'un système fini constitué de $k+1$ points $\{M_0, \cdots, M_k\}$ de X est affinement libre si le système de vecteurs $\left\{\overrightarrow{M_0M_1}, \cdots, \overrightarrow{M_0M_k}\right\}$ est libre. Il revient au même de dire que le sous-espace affine engendré $<M_0, \cdots, M_k>$ est de dimension k. On dit aussi que les points $M_0, \cdots, M_k$ sont affinement indépendants.*

Définition 1.12. **(repère affine)** *Soit X un espace affine de dimension finie n. On appelle repère affine de X, tout système (ordonné) $(A_0, \cdots, A_n)$ fini constitué de $n+1$ points affinement indépendants de X.*

Exemple 1.13.

1. Un repère affine d'une droite affine D est constitué de deux points (ordonnés) distincts dans D: $\mathcal{R}_a = (A_0, A_1)$.
2. Un repère affine d'un plan affine $\mathcal{P}$ est constitué de trois points (ordonnés) non alignés dans $\mathcal{P}$: $\mathcal{R}_a = (A_0, A_1, A_2)$.
3. Un repère affine d'un espace affine X de dimension 3 est constitué de quatre points (ordonnés) non coplanaires dans X: $\mathcal{R}_a = (A_0, A_1, A_2, A_3)$.

On remarque tout de suite que si X est un espace affine de dimension finie n, la donnée d'un repère affine de X équivaut à la donnée d'une origine A_0 de X et d'une base $(\overrightarrow{A_0A_1}, \cdots, \overrightarrow{A_0A_n})$ de $\vec{X}$.

Définition 1.14. **(repère cartésien)** *Soit X un espace affine de dimension n. On appelle repère cartésien de X, un $(n+1)$-uplet $(O, e_1, \cdots, e_n)$ constitué d'un point origine $O \in X$ et d'une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de $\vec{X}$.*

Remarque 1.15. Soient X un espace affine de dimension n et $\mathcal{R} = (O, e_1, \cdots, e_n)$ un repère cartésien de X. Pour $i \in \{1, \cdots, n\}$, si A_i est l'unique point de X tel que $\overrightarrow{OA_i} = e_i$,
alors $\mathcal{R}_a = (O, A_1, \cdots, A_n)$ est un repère affine de X.

Définition 1.16. (système de coordonnées cartésiennes) *Soit X un espace affine de dimension n, de corps de base K, muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}=(O, e_1, \cdots, e_n)$. Pour tout point M de X, il existe un unique n-uplet $(x_1, \cdots, x_n) \in K^n$ tel que $\overrightarrow{OM}=x_1e_1+\cdots+x_ne_n$. $(x_1, \cdots, x_n)$ est appelé système de coordonnées (cartésiennes) du point M dans le repère cartésien $\mathcal{R}$.*

Exemple 1.17. Considérons dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ le plan affine $\mathcal{P}=\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x-2y+3z=1\}$. Prenons pour origine de $\mathcal{P}$ le point $O=(1,0,0)$ et prenons pour base de $\vec{\mathcal{P}}$, le système $(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}=(-1,1,1)$, $\vec{v}=(1,2,1)$. Le point $M=(-3,1,2)$ appartient à $\mathcal{P}$ et on a $\overrightarrow{OM}=(-4,1,2)=3\vec{u}-\vec{v}$. Ainsi, dans le repère cartésien $\mathcal{R}=(O, \vec{u}, \vec{v})$ de $\mathcal{P}$, le point $M=(-3,1,2)$ a pour coordonnées $(3,-1)$.

Équations de droites affines dans un plan affine (rappels)

Soient $\mathcal{P}$ un plan affine muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}=(O,\, e_1,\, e_2)$, $D \subset \mathcal{P}$ une droite affine dont la direction $\vec{D}$ est engendrée par un vecteur $v=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2$.

Soit A_0 un point de D. Par définition de D, un point M de $\mathcal{P}$ appartient à D si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{A_0M}$ et v sont colinéaires. Si le point M admet pour coordonnées $(x,\, y)$ dans le repère $\mathcal{R}$ et que A_0 admet pour coordonnées (x_0, y_0) dans le même repère, la colinéarité de $\overrightarrow{A_0M}$ et v s'écrit: $\begin{vmatrix} x-x_0 & \alpha_1 \\ y-y_0 & \alpha_2 \end{vmatrix}=0$.

Ainsi, dans le repère $\mathcal{R}$ la droite D admet pour équation (cartésienne)

$$\alpha_2(x-x_0)-\alpha_1(y-y_0)=0.$$

La droite D étant déterminée par la donnée du point A_0 et d'un vecteur directeur v, nous aurions pu écrire que le point M appartient à D si et seulement s'il existe $t \in K$ tel que $\overrightarrow{A_0M}=tv$.

D étant une droite affine, on sait que pour tout $t \in K$, il existe $M \in D$ tels $\overrightarrow{A_0M}=tv$. Nous obtenons ainsi une équation paramétrique de la droite D: $(x-x_0,\, y-y_0)=t(\alpha_1,\, \alpha_2)$. Ce qui s'écrit encore, en terme de matrices unicolonnes, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$. En éliminant le paramètre t dans ce système de deux équations, on retrouve l'équation cartésienne de la droite.

Équations de plans dans un espace affine de dimension 3 (rappels)

Soient X un espace affine de dimension 3 muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}=(O, e_1, e_2, e_3)$, $\mathcal{P} \subset X$ un plan affine de direction $\vec{\mathcal{P}}$ engendré par deux vecteurs (v_1, v_2) avec $v_1=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3$, $v_2=\beta_1e_1+\beta_2e_2+\beta_3e_3$.

Soit A_0 un point de $\mathcal{P}$. Par définition de $\mathcal{P}$, un point M de X appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si le système $(\overrightarrow{A_0M}, v_1, v_2)$ est lié. Si le point M admet pour coordonnées (x, y, z) dans le repère $\mathcal{R}$ et que A_0 admet pour coordonnées $(x_0,\, y_0,\, z_0)$ dans le même repère, le système $(\overrightarrow{A_0M}, v_1, v_2)$ est lié si et seulement si $\begin{vmatrix} x-x_0 & \alpha_1 & \beta_1 \\ y-y_0 & \alpha_2 & \beta_2 \\ z-z_0 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}=0$.

En développant ce déterminant par rapport à la première colonne (par exemple), on obtient une équation cartésienne du plan affine $\mathcal{P}$. Une équation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ s'obtient en écrivant:

$$(x-x_0, y-y_0, z-z_0)=t_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)+t_2(\beta_1, \beta_2, \beta_3).$$

1.4 Positions relatives de sous-espaces affines

Définition 1.18. *Soient X un espace affine, Z_1, Z_2 deux sous-espaces affines de X.*
On dit que Z_1 et Z_2 sont parallèles si Z_1 et Z_2 ont même direction ($\vec{Z_1} = \vec{Z_2}$).
On écrit alors $Z_1 // Z_2$.
Il arrive que l'on dise que Z_1 est faiblement parallèle à Z_2, pour exprimer que l'on a simplement $\vec{Z_1} \subsetneq \vec{Z_2}$

En utilisant la définition de sous-espace affine, on vérifie facilement la proposition suivante:

Proposition 1.19. *Soient X un espace affine, Z_1 et Z_2 deux sous-espaces affines parallèles de X. Alors Z_1 et Z_2 sont soit disjoints soit confondus.*

Proposition 1.20. *Soient X un espace affine, Z_1, Z_2 deux sous-espaces affines non vides de X tels que $\vec{Z_1} + \vec{Z_2} = \vec{X}$. Alors $Z_1 \cap Z_2$ est un sous-espace affine non vide, de dimension*
$\dim(Z_1) + \dim(Z_2) - \dim(X)$.

Démonstration. Soient $A_1 \in Z_1$, $A_2 \in Z_2$. Le vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$ s'écrit $\overrightarrow{A_1A_2} = v_1 + v_2$ (écriture non nécessairement unique) avec $v_1 \in \vec{Z_1}$ et $v_2 \in \vec{Z_2}$. Soit N l'unique point de Z_1 tel que $\overrightarrow{A_1N} = v_1$. Par la relation de Chasles (dans X) on a $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1N} + \overrightarrow{NA_2}$. On en déduit que $\overrightarrow{A_2N} = -v_2$, donc $N \in Z_2$. $Z_1 \cap Z_2$ est donc non vide, de direction $\overrightarrow{Z_1 \cap Z_2} = \vec{Z_1} \cap \vec{Z_2}$.

On a $\dim(\vec{Z_1} \cap \vec{Z_2}) = \dim(\vec{Z_1}) + \dim(\vec{Z_2}) - \dim(\vec{Z_1} + \vec{Z_2})$. D'où le résultat. □

En particulier, lorsque X est un plan affine on a:

Proposition 1.21. *Deux droites affines non parallèles d'un plan affine $\mathcal{P}$ sont sécantes (c'est-à-dire se rencontrent en un point unique).*

Démonstration. Il suffit de recopier la preuve de la proposition précédente en remarquant que les droites D_1 et D_2 n'étant pas parallèles, on a $\vec{\mathcal{P}} = \vec{D_1} \oplus \vec{D_2}$.
□

De même, lorsque X est un espace affine de dimension 3 on a:

Corollaire 1.22.

- *Deux plans non parallèles dans un espace affine X de dimension 3 se rencontrent le long d'une droite.*
- *Dans un espace affine X de dimension 3, un plan $\mathcal{P}$ et une droite $\mathcal{D}$ tels que $\vec{\mathcal{D}} \not\subset \vec{\mathcal{P}}$ se rencontrent en un point unique.*