1.6 Barycentres

Soient X un espace affine non vide, $A_1, \cdots, A_s$ un système de s points de X, $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ des éléments du corps de base K. Le système $((A_1, \lambda_1), \cdots, (A_s, \lambda_s))$ est appelé système de points pondérés de X. On a la proposition suivante:

Proposition 1.33. *L'application :* $\Lambda \colon X \longrightarrow \vec{X}$ *définie par* $\Lambda(M) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$ *(appelée fonction vectorielle de Leibniz) est constante si* $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i = 0$ *et bijective si* $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \neq 0$.

Lorsque $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \neq 0$, *l'unique point* G *de* X *tel que* $\Lambda(G) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{0}$
est appelé barycentre du système de points pondérés $((A_1, \lambda_1), \cdots, (A_s, \lambda_s))$.
On le note $\mathrm{Bar}((A_1, \lambda_1), \cdots, (A_s, \lambda_s))$.
On parle d'isobarycentre lorsque tous les λ_i *sont égaux.*

Démonstration. Supposons $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i = 0$. Soient M et N deux points de X.
On a $\Lambda(M) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA_i}) = (\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i)\overrightarrow{MN} + \Lambda(N)$.
On en déduit que $\Lambda(M) = \Lambda(N)$.

Supposons $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \neq 0$ et fixons une origine $O \in X$.
On a pour tout $M \in X$, $\Lambda(M) = (\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i)\overrightarrow{MO} + \Lambda(O)$.
On voit alors que l'on a $\Lambda(M) = \Lambda(M')$ si et seulement si $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{M'O}$, ce qui équivaut à $M = M'$, donc Λ injective. Λ est surjective car pour $\vec{v} \in \vec{X}$ un vecteur donné, il existe un point M (unique) tel que $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}(\Lambda(O) - \vec{v})$. □

Remarque 1.34. Soient X un espace affine non vide, $A_1, \cdots, A_s$ des points de X affectés des poids respectifs $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$. On suppose que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_s \neq 0$. Alors,

1. pour tout scalaire non nul α, on a
   $\mathrm{Bar}((A_1, \lambda_1), \cdots, (A_s, \lambda_s)) = \mathrm{Bar}((A_1, \alpha\lambda_1), \cdots, (A_s, \alpha\lambda_s))$.
   Ce qui signifie que le barycentre d'un système de points ne change pas si on multiplie tous les poids par un même scalaire non nul.
2. $\mathrm{Bar}((A_1, \lambda_1), \cdots, (A_s, \lambda_s))$ appartient au sous-espace affine de X engendré par les points $A_1, \ldots, A_s$.

La proposition suivante est très utile pour construire le barycentre d'un système de points.

Proposition 1.35. **(associativité du barycentre)** *Soient* X *un espace affine (réel),* $A_1, \cdots, A_s$ *des points de* X *affectés des poids respectifs* $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$. *On suppose que* $\lambda_1 + \cdots + \lambda_s \neq 0$. *Soient* I *et* J *sont deux sous-ensembles non vides et complémentaires dans* $\{1, \cdots, s\}$ $(I \sqcup J = \{1, \cdots, s\})$. *Si* $\mu_1 = \sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$ *et* $G_1 = \mathrm{Bar}((A_i, \lambda_i)_{i \in I})$, *alors on a*

$\mathrm{Bar}((A_1, \lambda_1), \cdots, (A_s, \lambda_s)) = \mathrm{Bar}((G_1, \mu_1), (A_j, \lambda_j)_{j \in J})$.
Si en plus on a $\mu_2 = \sum_{j \in J} \lambda_j \neq 0$, *et* $G_2 = \mathrm{Bar}((A_j, \lambda_j)_{j \in J})$, *alors*
$\mathrm{Bar}((A_1, \lambda_1), \cdots, (A_s, \lambda_s)) = \mathrm{Bar}((G_1, \mu_1), (G_2, \mu_2))$.

Exemple 1.36. L'isobarycentre d'un triangle ABC dans un plan affine est son centre de gravité. Par associativité du barycentre, on vérifie que les trois médianes du triangle sont concourantes en son centre de gravité.

Proposition 1.37. (coordonnées barycentriques) *Soit X un espace affine de dimension n, muni d'un repère affine $(A_0, \cdots, A_n)$. Alors pour tout point $M \in X$, il existe un $(n+1)$-uplet unique, $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n) \in K^{n+1}$ tel que $M = \mathrm{Bar}((A_0, \lambda_0), \cdots, (A_n, \lambda_n))$ et $\lambda_0 + \cdots + \lambda_n = 1$.*
Ce $(n+1)$-uplet $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n)$ est appelé système de coordonnées barycentriques du point M dans le repère considéré.

Démonstration. $(A_0, \cdots, A_n)$ étant un repère affine de X, pour tout point M, il existe un unique n-uplet $(x_1, \cdots, x_n)$ tel que $\sum_{i=1}^{i=n} x_i \overrightarrow{A_0 A_i} = \overrightarrow{A_0 M}$.
En utilisant la relation de Chasles cela donne $\sum_{i=1}^{i=n} x_i(\overrightarrow{A_0 M} + \overrightarrow{M A_i}) = \overrightarrow{A_0 M}$,
c'est-à-dire $(1 - \sum_{i=1}^{i=n} x_i)\overrightarrow{M A_0} + \sum_{i=1}^{i=n} x_i \overrightarrow{M A_i} = \vec{0}$.
On a donc l'existence avec $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^{i=n} x_i$ et $\lambda_i = x_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Pour l'unicité, il suffit d'écrire que $\sum_{i=0}^{i=n} \lambda_i \overrightarrow{M A_i} = \vec{0}$ équivaut à $\overrightarrow{M A_0} + \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \overrightarrow{A_0 A_i} = \vec{0}$ (en utilisant la relation de Chasles). □

Proposition 1.38. *Soient X un espace affine, $A_1, \cdots, A_s$ des points de X, alors le sous-espace affine de X engendré par $A_1, \cdots, A_s$ est l'ensemble de tous les barycentres du système $A_1, \cdots, A_s$.*

Conservation du barycentre sous une application affine

Proposition 1.39. *Soient X, Y deux espaces affines, $f: X \longrightarrow Y$ une application affine.*
Si $A_1, \cdots, A_s$ est un système de points de X affectés des poids respectifs $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_s \neq 0$, alors on a $f(\mathrm{Bar}((A_1, \lambda_1), \cdots, (A_s, \lambda_s))) = \mathrm{Bar}((f(A_1), \lambda_1), \cdots, (f(A_s), \lambda_s))$
(l'image du barycentre est le barycentre des images, affectés des mêmes poids).

Démonstration. Soit $G \in X$ tel que $\sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i \overrightarrow{G A_i} = \vec{0}$. On a alors $\sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i \vec{f}(\overrightarrow{G A_i}) = \vec{0}$.

Ce qui par définition de f signifie $\sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i \overrightarrow{f(G) f(A_i)} = \vec{0}$,

donc $f(G)$ est barycentre du système $(f(A_1), \lambda_1), \cdots, (f(A_s), \lambda_s)$. □

Le théorème suivant donne une caractérisation des applications affines:

Théorème 1.40. *Soient X, Y deux espaces affines, f: $X \longrightarrow Y$ une application. Alors f est affine si et seulement si f conserve les barycentres.*