1.7 Trois théorèmes classiques: Thalès, Desargues, Pappus

Définition 1.41. (mesure algébrique) *Soient $\mathcal{D}$ une droite affine dans un espace affine X, $\vec{v}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Pour $A, B \in \mathcal{D}$, on appelle mesure algébrique du bipoint (A, B), relativement à $\vec{v}$, l'unique scalaire $\lambda \in K$ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{v}$. Cette mesure algébrique se note $\overline{AB}$.*

On vérifie facilement que si A, B, C et D sont quatre points d'une droite affine $\mathcal{D}$, alors le rapport $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$ $(A \neq B)$ ne dépend pas du vecteur directeur de $\mathcal{D}$ choisi.

Théorème 1.42. (théorème de Thalès dans un plan affine) *Soit $\mathcal{P}$ un plan affine, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites distinctes dans $\mathcal{P}$. Si Δ_1, Δ_2, Δ_3 sont trois droites distinctes, parallèles, de direction distincte de $\vec{\mathcal{D}}$ et $\vec{\mathcal{D}}'$, telles que $\Delta_i\,(1 \leqslant i \leqslant 3)$ coupe $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ respectivement en A_i et A_i', alors on a:*

$$\frac{\overline{A_1'A_3'}}{\overline{A_1'A_2'}} = \frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{A_1A_2}}.$$

Démonstration. Nous avons $\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{D}} \oplus \vec{\Delta}_1$, donc $\overrightarrow{A_1'A_3'}$ s'écrit de manière unique $\overrightarrow{A_1'A_3'} = \vec{u} + \vec{v}$, où $\vec{u} \in \vec{\mathcal{D}}$ et $\vec{v} \in \vec{\Delta}_1$. En utilisant la relation de Chasles, on trouve: $\vec{u} = \overrightarrow{A_1A_3}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{A_1'A_1} + \overrightarrow{A_3A_3'}$. Nous savons que $\overrightarrow{A_1A_3} = \lambda\overrightarrow{A_1A_2}$ et que $\overrightarrow{A_1'A_3'} = \lambda'\overrightarrow{A_1'A_2'}$. En utilisant encore une fois la relation de Chasles, on obtient: $\overrightarrow{A_1'A_3'} = \lambda'\overrightarrow{A_1'A_2'} = \lambda'(\overrightarrow{A_1'A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_2'})$.
On en déduit alors que $\lambda = \lambda'$, d'où le théorème. □

Corollaire 1.43. *Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites sécantes en A dans un plan affine $\mathcal{P}$. Soient B, C deux points de $\mathcal{D}$ distincts de A; B', C' deux points de $\mathcal{D}'$ distincts de A. Alors les droites (BB') et (CC') sont parallèles si et seulement si $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}}$.*

Démonstration. Dans un sens on applique le théorème 1.42 en faisant passer par A une droite parallèle à (BB'), ensuite on utilise une homothétie de centre A envoyant B sur C. □

Énoncé du théorème de Thalès dans un espace affine de dimension au moins 3:

Définition 1.44. *Soit X un espace affine de dimension n au moins égale à 3. On appelle hyperplan de X, tout sous-espace affine H de X, de dimension $n-1$ (lorsque $\dim(X) = 3$, H est un plan affine).*

Théorème 1.45. *Soient X un espace affine de dimension $n \geqslant 3$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ deux droites affines distinctes de X, H_1, H_2, H_3 trois hyperplans distincts, parallèles et de direction ne contenant pas celles de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Si l'hyperplan H_i coupe les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ respectivement en A_i, A_i', alors on a:*

$$\frac{\overline{A_1'A_3'}}{\overline{A_1'A_2'}} = \frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{A_1A_2}}.$$

Théorème 1.46. (théorème de Desargues) *Soient X un espace affine, ABC et $A'B'C'$ deux triangles non dégénérés de X tels que $A \neq A'$, $B \neq B'$ et $C \neq C'$.*
On suppose que $(AB)//(A'B')$, $(BC)//(B'C')$ et $(CA)//(C'A')$. Alors les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes ou parallèles.

Démonstration. Les droites (AB) et $(A'B')$ étant parallèles, les quatre points A, B, A' et B' sont coplanaires. De même, les points A, C, A' et C' sont coplanaires.
On commence par remarquer que si les points A, B, A' et B' sont alignés, alors il n'y a rien à prouver (les droites (AA') et (BB') étant alors confondues).
Supposons les points A, B, A' et B' non alignés.
Si les droites (AA') et (BB') sont sécantes en un point O, on vérifie alors que $O \neq A$, $O \neq A'$, $O \neq B$ et $O \neq B'$. On considère alors h, l'homothétie de centre O envoyant A sur A'.
L'hypothèse $(AB)//(A'B')$ nous donne $h(B) = B'$. Posons $h(C) = C''$. $h(AC)$ est la droite parallèle à (AC) et passant par $h(A) = A'$, de même $h(BC)$ est la droite parallèle à (BC) et passant par $h(B) = B'$. Ainsi $h(AC) = (A'C')$, $h(BC) = (B'C')$.
On en déduit que $C'' = C'$, donc les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes en O.
Si (AA') et (BB') sont parallèles, on considère la translation $t_{\overrightarrow{AA'}}$ envoyant A sur A'. Des hypothèses $(AB)//(A'B')$ et $(AA')//(BB')$ on déduit que $AA'\ B'B$ est un parallélogramme, donc $t_{\overrightarrow{AA'}}(B) = B'$. Posons $C'' = t_{\overrightarrow{AA'}}(C)$. On a $t_{\overrightarrow{AA'}}(AC) = (A'C')$, $t_{\overrightarrow{AA'}}(BC) = (B'C')$ et on en déduit $C'' = C'$, donc les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles. □

Théorème 1.47. (théorème de Pappus) *Soient A, B, C trois points distincts d'une droite affine $\mathcal{D}$, A', B', C' trois points, d'une autre droite $\mathcal{D}'$. Si $(AB')//(BC')$ et $(A'B)//(B'C)$, alors on a $(AA')//(CC')$.*

Démonstration. On commence par remarquer que si $\mathcal{D}//\mathcal{D}'$, alors c'est gagné (faire un dessin et utiliser des parallélogrammes).
Notons que la condition $(AB')//(BC')$ et $(A'B)//(B'C)$ entraîne que les six points sont coplanaires.
Il reste à traiter la situation où les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en un point O.
Supposons donc $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sécantes en O. Soit alors h_1 l'homothétie de centre O qui envoie A sur B et h_2 l'homothétie de centre O qui envoie B sur C.
Ces deux homothéties commutent car elles ont même centre. On a $h_2 \circ h_1(A) = h_1 \circ h_2(A) = C$, $h_2 \circ h_1(A') = h_1 \circ h_2(A') = C'$. $h_2 \circ h_1$ étant une homothétie, on en déduit que $(AA')//(CC')$. □