Université de Nice Sophia Antipolis

Licence L2 - Géométrie

Année 2014-2015 (Semestre 4)

Feuille de TD 1

A) Exercices de révision d'algèbre linéaire

Exercice 1. Soit f l'endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (-x+2y-2z, 4x-3y+4z, 5x-5y+6z).$$

1. Montrez que $f \circ f = f$ (on dit que f est un projecteur)
2. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
3. Montrer que (x,y,z) appartient à $\mathrm{Im}(f)$ si, et seulement si $x-y+z=0$.
4. Résoudre l'équation $f(x,y,z) = (2,1,-1)$.

Exercice 2. Soient E un K-espace vectoriel de dimension 3 ($K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $f\colon E \longrightarrow E$ une application linéaire non nulle telle que $f^2 = 0$ (par définition, $f^2 = f \circ f$).
Calculer la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ (on pourra utiliser le théorème du rang en remarquant que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$). Donner un exemple.

Exercice 3. Soient α un paramètre réel, $f_\alpha\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & (2-\alpha) \\ (2-\alpha) & \alpha & -1 \\ -1 & (2-\alpha) & \alpha \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de M_α (pour vérifier votre calcul: $\det(M_\alpha) = 3(\alpha-1)^2+4$).
2. Vérifier que le vecteur de coordonnées $(1,1,1)$ est vecteur propre de f_α puis résoudre dans $\mathbb{R}^3$, le système suivant où les inconnues sont x, y et z:

$$(S_\alpha)\begin{cases} \alpha x - y + (2-\alpha)z = 1 \\ (2-\alpha)x + \alpha y - z = 1 \\ -x + (2-\alpha)y + \alpha z = 1 \end{cases}.$$

Exercice 4. Rédiger une preuve détaillée de l'énoncé suivant:

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n (disons par exemple $n=3$).
Si f un endomorphisme de E tel que pour tout $\vec{v} \in E$, $\vec{v}$ et $f(\vec{v})$ sont colinéaires, alors f est une homothétie.

B) Sous-espaces affines: parallélisme, équations, intersection

Exercice 5. Soient A, B, C, D quatre points distincts et non tous alignés du plan affine usuel $\mathbb{R}^2$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

i. La droite (AB) est parallèle à la droite (CD) et la droite (AC) est parallèle à la droite (BD).

ii. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

iii. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

iv. Les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu.

Ces quatre conditions restent-elles équivalentes lorsque les points A, B, C et D sont alignés?

Pour quatre points distincts et non tous alignés d'un plan affine, lorsque l'une quelconque des conditions ci-dessus est satisfaite, on dit que $ABDC$ est un parallélogramme.

Exercice 6. $\mathcal{P}$ est un plan affine réel muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les quatre points A, B, C et D de $\mathcal{P}$ dont les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$ sont respectivement

$$(1, -2),\ (3, 1),\ (-3, -2) \text{ et } (-2, -1).$$

1. Les points A, B et C sont-ils alignés? (Justifiez votre réponse).
2. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles? (Justifiez votre réponse).
3. Donner une équation cartésienne de la droite (AB).
4. Calculer l'intersection des droites (AB) et (CD).
5. Donner une équation cartésienne de la droite passant par le milieu du segment $[BD]$ et parallèle à la droite d'équation $2x - y + 1 = 0$.

Exercice 7. On suppose le plan affine usuel $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère cartésien. Soient D_1 la droite d'équation $x + 2y + 5 = 0$ et D_2 celle d'équation $3x - y + 8 = 0$. À tout nombre réel m on associe la droite Δ_m d'équation $(3m+1)x + (-m+2)y + 8m + 5 = 0$.

1. Soit M_0 le point commun de D_1 et D_2. Montrer que M_0 est sur Δ_m, quel que soit m.
2. Soit A un point du plan, discuter suivant la position de A, le nombre de droites Δ_m passant par A.
3. Soit $\mathcal{D}$ une droite non concourante à D_1 et D_2. Combien y a-t-il de droites Δ_m parallèles à $\mathcal{D}$?

Exercice 8.
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel de dimension 3, muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
Soient A, B, C, D les quatre points de $\mathcal{E}$ ayant pour coordonnées respectivement

$$(1, 1, 1),\ (2, 1, -1),\ (4, 0, 2) \text{ et } (1, 2, 3).$$

1. Après avoir vérifié que les points A, B et C ne sont pas alignés, donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_1$ engendré par ces trois points.
2. Soient $\vec{v_1} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{v_2} = \vec{v} + \vec{w}$. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$ passant par D et de direction engendrée par $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$.
3. Décrire l'intersection $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.
4. Soit Δ la droite passant par le milieu de $[AD]$ et de direction engendrée par $(\vec{u} - \vec{w})$.
   Décrire $\Delta \cap \mathcal{P}_1$ et $\Delta \cap \mathcal{P}_2$.

Exercice 9. Soient $\mathcal{E}$ un espace affine réel de dimension 3, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_4$ quatre droites de $\mathcal{E}$, deux à deux sécantes.
Montrer que ces quatre droites sont soit concourantes soit coplanaires.