Université de Nice Sophia Antipolis

Licence L2 - Géométrie

Année 2014 - 2015 (Semestre 4)

Feuille de TD 5

Exercice 1. (utiliser une homothétie pour comparer deux distances) Soient A, B et C trois points non alignés dans le plan euclidien usuel. On note H l'orthocentre (point de concours des trois hauteurs) du triangle ABC et O le centre du cercle circonscrit à ABC.

1. Montrer que la distance de H à un sommet est égale à deux fois la distance de O au côté opposé (par exemple la distance de H à A est égale deux fois celle de O à BC).

2. Montrer la relation $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$ (relation de Sylvester).

(Indication: considérer une homothétie de rapport $-\dfrac{1}{2}$ et de centre l'isobarycentre du triangle ABC)

Exercice 2. (calcul de coordonnées d'un point après réflexion par rapport à un plan) Soit X un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}=(O,e_1,e_2,e_3)$. On note (x,y,z) les coordonnées d'un point M dans ce repère. Soient $\mathcal{P}$ le plan affine d'équation $3x-2y+6z-1=0$, $s_{\mathcal{P}}$ la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

1. Choisir en dehors de $\mathcal{P}$, un point A de coordonnées (x_0, y_0, z_0) (dans le repère $\mathcal{R}$) et calculer dans ce même repère, les coordonnées du point $A'=s_{\mathcal{P}}(A)$.

2. Soient $\mathcal{P}'$ le plan affine d'équation $3x-2y+6z-3=0$, $s_{\mathcal{P}'}$ la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}'$. Que peut-on dire de $s_{\mathcal{P}'}\circ s_{\mathcal{P}}$ et de $s_{\mathcal{P}}\circ s_{\mathcal{P}'}$?

Exercice 3. (composer des symétries centrales) Soient X un espace affine euclidienne, A et B deux points distincts de X. Pour $M\in X$, on note s_M la symétrie centrale de centre M.

1. Montrer que $s_A\circ s_B$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ à déterminer.

2. Soient C et D deux autres points de X. Montrer que $s_A\circ s_B = s_C\circ s_D$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

3. Soit $\vec{v}\in\vec{X}$, montrer que $t_{\vec{v}}\circ s_A = s_{A'}$ où A' est un point à déterminer ($t_{\vec{v}}$ est la translation de vecteur $\vec{v}$). Que peut-on dire de $s_A\circ t_{\vec{v}}$?

4. Montrer que $s_A\circ s_B\circ s_C = s_P$ pour un point P à déterminer.

5. On suppose que X est un plan affine. Si ABC est un triangle non aplati de X, que peut-on dire de $s_A\circ s_B\circ s_C$?

Exercice 4. (composer deux symétries axiales dans un plan vectoriel) Le plan vectoriel euclidien usuel $\mathbb{R}^2$, est supposé orienté et muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B}=(\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

1. Soient α, β deux réels non tous nuls, Δ la droite vectorielle engendrée par $\alpha\vec{i}\,+\beta\vec{j}\,$, s_Δ la réflexion par rapport à Δ. Donner la matrice de s_Δ dans la base $\mathcal{B}$.

2. Soient Δ_1 la droite vectorielle engendrée par $2\vec{i}\,+\vec{j}\,$, Δ_2 celle engendrée par $\vec{i}\,+\vec{j}\,$. On note s_{Δ_1} (resp. s_{Δ_2}) la réflexion d'axe Δ_1 (resp. Δ_2). Donner la matrice de $s_{\Delta_2}\circ s_{\Delta_1}$ dans la base $\mathcal{B}$. Quelle est l'image de Δ_1 par $s_{\Delta_2}\circ s_{\Delta_1}$? Nature de $s_{\Delta_2}\circ s_{\Delta_1}$? Nature de $s_{\Delta_1}\circ s_{\Delta_2}$?

Exercice 5. E est un plan vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1,\, e_2)$. Soient D_1 et D_2 deux droites vectorielles de E engendrées respectivement par les vecteurs unitaires $v_1 = \cos(\theta_1)e_1 + \sin(\theta_1)e_2$ et $v_2 = \cos(\theta_2)e_1 + \sin(\theta_2)e_2$.

1. Donner la matrice de $s_{D_2} \circ s_{D_1}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, où s_{D_i} est la réflexion d'axe D_i.

2. Décomposer une rotation vectorielle d'angle θ en un produit de réflexions.

Exercice 6. Dans le plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$ on considère deux rotations f_1 et f_2. f_1 est d'angle θ_1 et a pour centre A_1. f_2 est d'angle θ_2 et a pour centre A_2. On suppose f_1 et f_2 distinctes de l'identité, $A_1 \neq A_2$ et $\theta_1 + \theta_2 \neq 0 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)$. On note $\mathcal{D}_1$ la droite (A_1A_2).

Montrer qu'il existe une droite $\mathcal{D}_2$ passant par A_1, une droite $\mathcal{D}_3$ passant par A_2 telles que

$f_1 = s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$ et $f_2 = s_{\mathcal{D}_1} \circ s_{\mathcal{D}_3}$. Montrer que $f_1 \circ f_2$ est une rotation et construire son centre.

Exercice 7. Dans le plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$ on considère une rotation ρ de centre A et d'angle θ ($\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$) et une translation t_v de vecteur non nul v. Montrer que $t_v \circ \rho$ et $\rho \circ t_v$ sont des rotations d'angle θ et expliquer comment construire leur centre respectif.

Exercice 8. (extrait d'un partiel de 2010) Le plan euclidien usuel est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}\,, \vec{j}\,)$. On considère $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les droites d'équations respectives $x - 2y + 1 = 0$ et $3x - y - 7 = 0$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$.

2. Prendre $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ deux vecteurs unitaires qui engendrent respectivement $\overrightarrow{\mathcal{D}_1}$ et $\overrightarrow{\mathcal{D}_2}$ puis calculer:

   a) le produit scalaire $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}$

   b) le déterminant $\det(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ (déterminant pris relativement à la base $(\vec{i}\,, \vec{j}\,)$ de $\vec{\mathcal{P}}$)

   c) une mesure de l'angle orienté $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$

3. On note $s_{\mathcal{D}_i}$ la réflexion d'axe $\mathcal{D}_i$. Quelle est la nature de la transformation $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$?

4. Faire un dessin, y tracer les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et placer le point O', image de l'origine par la transformation $s_{\mathcal{D}_2} \circ s_{\mathcal{D}_1}$.

Exercice 9. Soit X un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé $\big(O, \vec{i}\,, \vec{j}\,, \vec{k}\,\big)$. On note (x, y, z) les coordonnées d'un point M dans ce repère. On se fixe un vecteur $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$. Soit f l'application affine qui à un point M de coordonnées (x, y, z) associe le point $M' = f(M)$ de coordonnées $(-z, -x, y)$. Pour $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, on note $t_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $\vec{v}$ et on pose

$$h = t_{\vec{v}} \circ f.$$

1. Montrer que h est une isométrie positive.

2. Montrer que h admet au moins un point fixe si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. Décrire alors l'ensemble des points fixes de h.

3. Montrer que $t_{\vec{v}} \circ f = f \circ t_{\vec{v}}$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

4. On suppose que le vecteur $\vec{v}$ n'est ni colinéaire, ni orthogonal au vecteur $\vec{u}$. Donner une description la plus complète possible de l'isométrie affine h.
