Université de Nice Sophia Antipolis — Licence L2 - Géométrie

Année 2008/2009 - semestre 4 -

Devoir-Maison n° 2

A rendre en séance TD, le lundi 6 avril 2009.

Vos réponses ou calculs doivent être accompagnés de justifications brèves et pertinentes.

Exercice (un exemple d'isométrie affine)

X est un espace affine euclidien de dimension 3, muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $f\colon X \longrightarrow X$ l'application affine qui à un point M de coordonnées (x, y, z) dans le repère $\mathcal{R}$ associe le point M' de coordonnées (x', y', z') dans le même repère, tel que:

$$(x', y', z') = \left(\frac{x - 2y + 2z + 4}{3}, \frac{-2x + y + 2z + 4}{3}, \frac{2x + 2y + z - 4}{3} \right).$$

On note $\vec{f}$ la partie linéaire de f.

1. Donner la matrice de $\vec{f}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\vec{X}$.
2. Montrer que f est une isométrie.
3. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des points fixes de f ($\mathcal{F} = \{M \in X \,/\, f(M) = M\}$).
   a) Montrer que $\mathcal{F}$ est un plan affine de X.
   b) On note $\mathcal{P}$ le plan constitué des points fixes de f. Donner une base orthonormée de $\vec{\mathcal{P}}$ et la compléter ensuite en une base orthonormée de $\vec{X}$.
4. Avec les résultats et les notations des questions précédentes, soit $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée de $\vec{X}$ telle que (e_1, e_2) est une base orthonormée de $\vec{\mathcal{P}}$.
   a) Sachant que l'application f considérée ici est une isométrie, que $\vec{f}(e_1) = e_1$ et $\vec{f}(e_2) = e_2$, que vaut $\vec{f}(e_3)$? (On ne demande pas d'expliciter les vecteurs e_1, e_2, e_3). Donner la matrice de $\vec{f}$ dans la base $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ de $\vec{X}$.
   b) Choisir un point O' dans $\mathcal{P}$. Dans le nouveau repère $\mathcal{R}' = (O', e_1, e_2, e_3)$, on note (x_1, x_2, x_3) les coordonnées d'un point M de X et (x'_1, x'_2, x'_3) celles de $M' = f(M)$. Donner (x'_1, x'_2, x'_3) en fonction de (x_1, x_2, x_3).
   c) **(hors barème)** Soient α, β et γ trois nombres réels.
   On pose $\vec{v} = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$ et on note $t_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $\vec{v}$ ($t_{\vec{v}}\colon X \longrightarrow X$).
      i. Montrer que $t_{\vec{v}}$ et f commutent ($t_{\vec{v}} \circ f = f \circ t_{\vec{v}}$) si et seulement si $\gamma = 0$.
      ii. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (α, β, γ) pour que l'ensemble des points fixes de $t_{\vec{v}} \circ f$ soit non vide.