Université de Nice Sophia Antipolis — Licence L2 - Géométrie

Année 2008/2009 - semestre 4 -

Interrogation écrite du 9 mars 2009 (durée: 45mn) - Barème (à titre indicatif): 10, 10.

Vous pouvez utiliser vos notes de cours et de TD.

Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

Exercice 1.
X est un espace affine réel de dimension 3 muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On note (x, y, z) les coordonnées d'un point M de X. Soient A, B, C et D les quatre points de coordonnées respectives $(0,2,1)$, $(2,1,0)$, $(1,3,-1)$ et $(-1,-1,2)$ dans le repère $\mathcal{R}$.

1. Les points A, B et C ne sont pas alignés. Pourquoi?
2. Donner (par rapport au repère $\mathcal{R}$) une équation cartésienne du plan engendré par A, B et C.
3. Les quatre points A, B, C et D sont-ils coplanaires? Justifiez votre réponse.
4. On considère le vecteur $\vec{u} \in \vec{X}$ défini par $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
   a) Le vecteur $\vec{u}$ appartient-il à la direction du plan engendré par A, B et C?
   Justifiez votre réponse.
   b) On note $\mathcal{P}$ le plan engendré par A, B et C. Soit $\mathcal{P}'$ un plan passant par le point D et tel que $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}'}$. Que peut-on dire de l'intersection $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$?
   Justifiez votre réponse.

Exercice 2.
Soient $\mathcal{P}$ un plan affine réel, $ABDC$ un parallélogramme non applati de $\mathcal{P}$ (rappel: $\vec{AB} = \vec{CD}$).
On définit une application $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ de la manière suivante:
pour $M \in \mathcal{P}$, la parallèle à la droite AD par M coupe la droite BC en N. On note M' le milieu du segment $[MN]$ et on pose $f(M) = M'$.
L'application f ainsi définie est affine bijective (on ne demande pas de le prouver).

1. Faire un dessin et placer les points $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ et $f(D)$.
   Adjoindre un bref commentaire explicatif à votre dessin.
2. Placer dans le dessin du 1), le point E tel que $f(E) = D$.
   Expliquez brièvement comment on trouve le point E.
3. On munit à présent le plan $\mathcal{P}$ du repère cartésien $\mathcal{R} = (A, \vec{AB}, \vec{AC})$ et on note (x, y) les coordonnées d'un point M dans ce repère.
   a) Donner (par rapport au repère $\mathcal{R}$) une équation cartésienne de la droite BC.
   b) Donner (en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$) un vecteur directeur de la droite AD.
   c) Soit M_0 un point ayant pour coordonnées (x_0, y_0) dans le repère $\mathcal{R}$, donner en fonction de (x_0, y_0), les coordonnées de $f(M_0)$ dans ce même repère.
4. **(hors barème)** Quelle est la matrice de $\vec{f}$ dans la base $(\vec{AB}, \vec{AC})$ de $\vec{\mathcal{P}}$?