Université de Nice Sophia Antipolis Licence L2 - Géométrie

Année 2008/2009 - semestre 4 -

Interrogation écrite du 27 avril 2009 (durée: 45mn) - Barème (à titre indicatif): 12, 8.

Vous pouvez utiliser vos notes de cours et de TD (attention à ne pas s'y perdre).

Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

Exercice 1. Le plan affine euclidien usuel $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}=(O,\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

Soit m un nombre réel, différent de 0 et 2 ($m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$). On considère A_m, B_m et C les trois points du plan dont les coordonnées respectives sont $(m, 0)$, $(0, \frac{m}{2})$ et $(0, 1)$ dans le repère $\mathcal{R}$. On note $\mathcal{D}_m$ la droite A_mB_m.

1. Montrer que la droite $\mathcal{D}_m$ admet $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}$ pour vecteur directeur.
2. Donner (par rapport au repère $\mathcal{R}$) une équation cartésienne de la droite orthogonale à $\mathcal{D}_m$ et passant par C.
3. Donner les coordonnées du projeté orthogonal de C sur $\mathcal{D}_m$ et calculer la distance du point C à la droite $\mathcal{D}_m$. Pour quelles valeurs de m cette distance est-elle égale à 1?
4. Donner les coordonnées de l'orthocentre du triangle A_mB_mC. Qu'observe-t-on? (On rappelle qu'une hauteur dans un triangle non aplati est une droite orthogonale à un côté et passant par le sommet opposé à ce côté. Les trois hauteurs d'un triangle non aplati se rencontrent en un point H appelé l'orthocentre du triangle).
5. On suppose que $m=6$.

   Faire un dessin, tracer les 3 hauteurs et placer l'orthocentre du triangle A_mB_mC.
6. De tous les tiangles A_mB_mC, un seul est rectangle. Lequel?

Exercice 2. Le plan affine euclidien usuel $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}=(O,\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.
On note (x, y) les coordonnées d'un point par rapport à ce repère.
Soient $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y=0$ et $s_{\mathcal{D}}$ la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}$.

1. Soit $\vec{v}$ donné par $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}$. On note $t_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $\vec{v}$ et on pose $f=t_{\vec{v}}\circ s_{\mathcal{D}}$.
   a) Faire un dessin et placer les points O, A, B, $f(O)$, $f(A)$ et $f(B)$ où O est l'origine du repère, A le point de coordonnées $(1, 0)$ et B le point de coordonnées $(0, 1)$.
   b) Si le point M a pour coordonnées (x, y), donner en fonction de x et y les coordonnées du point $M'=f(M)$. f admet-elle des points fixes?
2. Soient α et β deux nombres réels. On pose $\vec{w}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}$, on note $t_{\vec{w}}$ la translation de vecteur $\vec{w}\in\vec{\mathcal{P}}$ et on pose $g=t_{\vec{w}}\circ s_{\mathcal{D}}$.
   a) Si le point M a pour coordonnées (x, y), donner en fonction de x, y, α et β, les coordonnées du point $M'=g(M)$.
   b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur (α, β) pour que g admette au moins un point fixe.
   c) Décrire l'ensemble des points fixes de g lorsqu'il est non vide.
   d) Donner une condition nécessaire et suffisante sur (α, β) pour que $t_{\vec{w}}$ et $s_{\mathcal{D}}$ commutent.