Université de Nice Sophia Antipolis — Licence L2 - Géométrie

Année 2008/2009 - semestre 4 -

Corrigé succinct du partiel du 4 mai 2009

Exercice 1. Soit X un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note (x, y, z) les coordonnées d'un point M de X. Soient A, B, C et D les quatre points de coordonnées respectives $(0, 2, 1)$, $(2, 1, 4)$, $(1, 3, 1)$ et $(3, -2, -1)$ dans le repère $\mathcal{R}$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   Solution: Dire que les points A, B et C ne sont pas alignés équivaut à dire que le système $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est libre. Nous avons $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{j}$. Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ étant non nul, il suffit de prouver que l'on ne peut trouver un nombre réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$. Ce qui est immédiat.

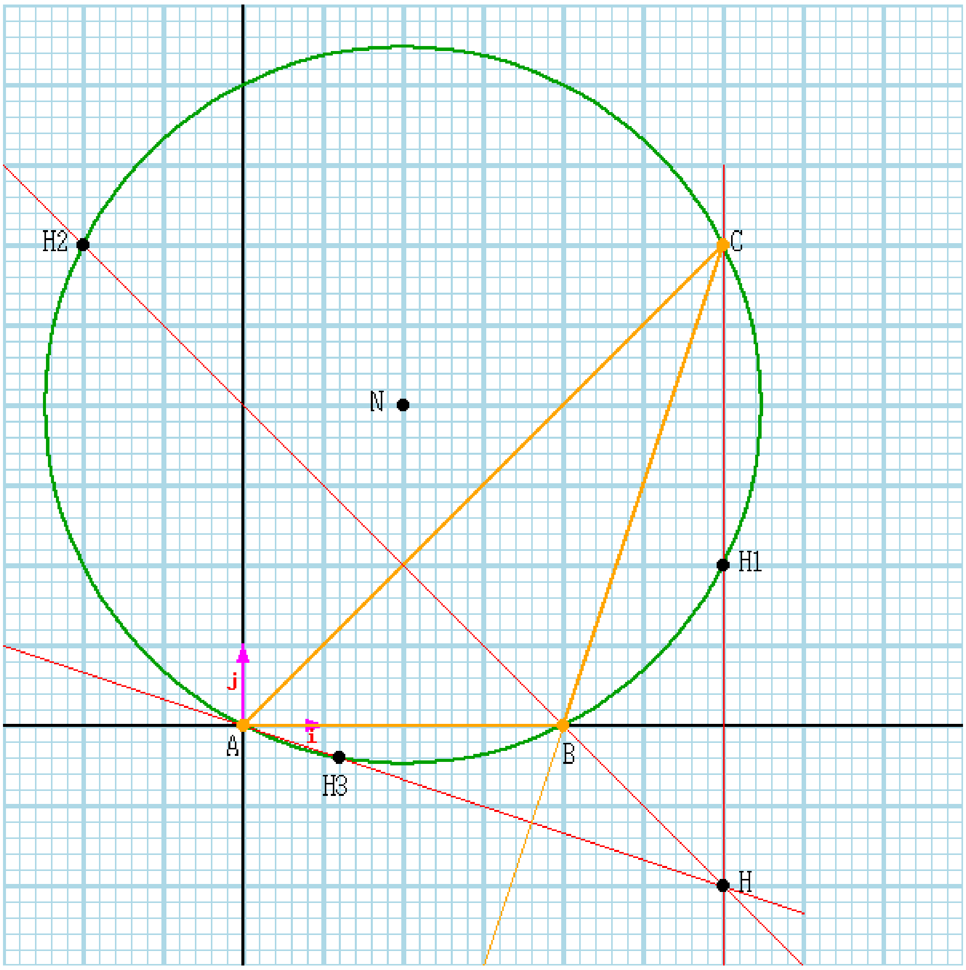
2. On note $\mathcal{P}$ le plan engendré par les points A, B et C. Calculer la distance d du point D au plan $\mathcal{P}$. Trouver un autre point $E \in X$ à cette même distance d de $\mathcal{P}$.

   Solution: Les points A, B et C n'étant pas alignés, ils engendrent un plan affine $\mathcal{P}$. Un point M de coordonnées (x, y, z) appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement le système $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est lié. En écrivant cette dernière condition sous la forme $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$, on trouve que $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne $-x + y + z - 3 = 0$.
   Soit D' le projeté ortogonal de D sur $\mathcal{P}$. On a $d = \left\|\overrightarrow{DD'}\right\|$. La perpendiculaire à $\mathcal{P}$ par D a pour équation paramétrique $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$. La valeur du paramètre t correspondant à D' est la solution de l'équation $-(3 - t) + (-2 + t) + (-1 + t) - 3 = 0$. Cette dernière équation a pour solution $t = 3$. On en déduit que $\overrightarrow{DD'} = 3(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$, donc $d = \left\|\overrightarrow{DD'}\right\| = 3\sqrt{3}$. Pour trouver un autre point E à la même distance, il suffit de prendre $E = t_{\vec{v}}(D)$ où $t_{\vec{v}}$ est une translation de vecteur non nul $\vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}$.
   Ainsi par exemple le point $E = t_{\overrightarrow{AC}}(D)$ qui a pour coordonnées $(4, -1, -1)$ convient.

Exercice 2. Le plan euclidien usuel est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère les points A, B et C dont les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$ sont respectivement $(0, 0)$, $(4, 0)$ et $(6, 6)$. On note H l'orthocentre du triangle ABC et Γ le cercle circonscrit au triangle ABC.
(Rappel: l'orthocentre est le point de concours des trois hauteurs; le cercle circonscrit est l'unique cercle passant par les trois sommets du triangle; le centre du cercle circonscrit est le point de concours des trois médiatrices.)

1. Quelles sont les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC? Faire un dessin.

   Solution: On trouve facilement que la hauteur issue de C a pour équation $x = 6$ et que celle issue de B a pour équation $x + y - 4 = 0$. On résout le système linéaire $\begin{cases} x = 6 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$ pour trouver que l'orthocentre H du triangle ABC a pour coordonnées $(x_0, y_0) = (6, -2)$.



2. Montrer que le cercle Γ a pour centre le point N de coordonnées $(2, 4)$.
   On note H_1 le symétrique orthogonal de H par rapport à la droite AB.
   Montrer que H_1 est sur le cercle Γ. Placer les points N et H_1 sur le dessin de la question 1.

   Solution: La médiatrice de $[AB]$ a pour équation $x = 2$ et la médiatrice de $[AC]$ a pour équation $x + y - 6 = 0$. Le point d'intersection de ces deux médiatrices est le point N de coordonnées $(2, 4)$. Nous aurions pu aussi écrire que $\overrightarrow{NA} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, $\overrightarrow{NB} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$, $\overrightarrow{NC} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ et constater tout simplement que $\left\|\overrightarrow{NA}\right\| = \left\|\overrightarrow{NB}\right\| = \left\|\overrightarrow{NC}\right\| = 2\sqrt{5}$.
   Si $M \in \mathcal{P}$ a pour coordonnées (x, y), alors son symétrique orthogonal M' par rapport à la droite AB (qui a pour équation $y = 0$) a pour coordonnées $(x', y') = (x, -y)$.
   H_1 a donc pour coordonnées $(x_1, y_1) = (6, 2)$. Il ne reste qu'à constater que le vecteur $\overrightarrow{NH_1} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$ a même norme que $\overrightarrow{NA}$.

3. Soient H_2 le symétrique orthogonal de H par rapport à la droite AC et H_3 le symétrique orthogonal de H par rapport à la droite BC. Montrer que H_2 et H_3 sont sur le cercle Γ. Placer les points H_2 et H_3 sur le dessin de la question 1.

   Solution: La perpendiculaire à AC par H a pour équation $x + y - 4 = 0$. Cette droite coupe AC en le point M de coordonnées $(2, 2)$ et M est le milieu de $[HH_2]$.
   Ainsi, si H_2 a pour coordonnées (x_2, y_2), alors on a $\frac{x_2+6}{2} = 2$ et $\frac{y_2-2}{2} = 2$. Il vient alors que H_2 a pour coordonnées $(x_2, y_2) = (-2, 6)$. On constate que le vecteur $\overrightarrow{NH_2} = -4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ a même norme que $\overrightarrow{NA}$, donc $H_2 \in \Gamma$. La droite BC a pour équation $3x - y - 12 = 0$. La normale à BC par H a pour équation paramétrique $\begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = -2 - t \end{cases}$. Les coordonnées $(x', y') = (6 + 3t, -2 - t)$ vérifient l'équation de BC si et seulement si $3(6 + 3t) - (-2 - t) - 12 = 0$, c'est-à dire $t = -\frac{4}{5}$.
   Ainsi le point R de coordonnées $(x', y') = \left(6 - \frac{12}{5}, -2 + \frac{4}{5}\right)$ est le milieu du segment $[HH_3]$.
   On en déduit facilement que H_3 a pour coordonnées $(x_3, y_3) = (\frac{6}{5}, -\frac{2}{5})$.
   On a $\overrightarrow{NH_3} = -\frac{4}{5}\vec{\imath} - \frac{22}{5}\vec{\jmath}$. On trouve que $\left\|\overrightarrow{NH_3}\right\| = \frac{2}{5}\left\|2\vec{\imath} + 11\vec{\jmath}\right\| = 2\sqrt{5}$, donc H_3 appartient au cercle Γ.

Exercice 3. $\mathcal{P}$ est le plan euclidien usuel, A, B et C sont trois points non alignés de $\mathcal{P}$. Soit U le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par $U = \left\{\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \text{ et } \lambda_4 \neq 0\right\}$.

Pour $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in U$ donné, on définit une application $f_{\underline{\lambda}} \colon \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ par

$f_{\underline{\lambda}}(M) = \mathrm{Bar}((A, \lambda_1), (B, \lambda_2), (C, \lambda_3), (M, \lambda_4))$ où $\mathrm{Bar}((A, \lambda_1), (B, \lambda_2), (C, \lambda_3), (M, \lambda_4))$ désigne le barycentre du système de points pondérés $(A, \lambda_1), (B, \lambda_2), (C, \lambda_3), (M, \lambda_4)$.

On se propose de trouver tous les $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in U$ pour lesquels $f_{\underline{\lambda}}$ est une isométrie.

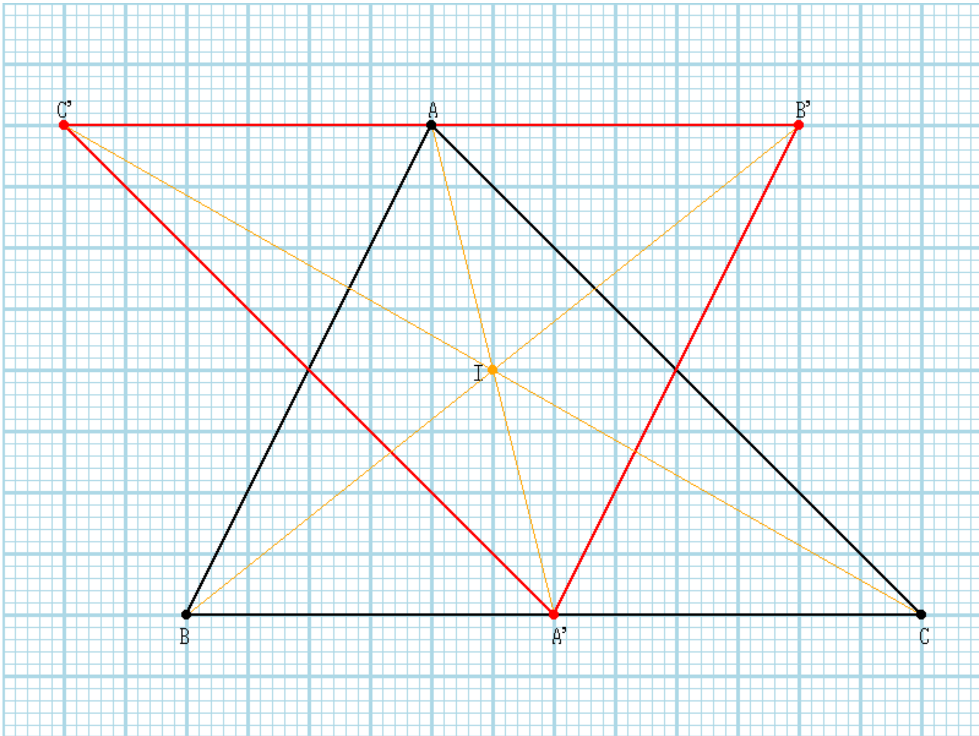
1. On suppose que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in U$ et $\lambda_4 \neq 1$.

   a) Montrer que le point $I_{\underline{\lambda}} = \mathrm{Bar}((A, \lambda_1), (B, \lambda_2), (C, \lambda_3))$ est bien défini et est un point fixe de $f_{\underline{\lambda}}$. En déduire que $f_{\underline{\lambda}}$ est une homothétie. Montrer que $f_{\underline{\lambda}}$ est une isométrie si et seulement si $\lambda_4 = -1$.

   Solution: On a $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 - \lambda_4$. Ainsi, si $\lambda_4 \neq 1$, alors on a $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \neq 0$ et $\mathrm{Bar}((A, \lambda_1), (B, \lambda_2), (C, \lambda_3))$ est bien défini. Posons alors $I' = f_{\underline{\lambda}}(I_{\underline{\lambda}})$. Nous avons par définition $\lambda_1\overrightarrow{I'A} + \lambda_2\overrightarrow{I'B} + \lambda_3\overrightarrow{I'C} + \lambda_4\overrightarrow{I'I_{\underline{\lambda}}} = \vec{0}$. En utilisant une relation de Chasles et le fait que par définition $\lambda_1\overrightarrow{I_{\underline{\lambda}}A} + \lambda_2\overrightarrow{I_{\underline{\lambda}}B} + \lambda_3\overrightarrow{I_{\underline{\lambda}}C} = \vec{0}$, on trouve qque $I' = I_{\underline{\lambda}}$. Maintenant, pour $M \in \mathcal{P}$, si on pose $M' = f_{\underline{\lambda}}(M)$, on a $\lambda_1\overrightarrow{M'A} + \lambda_2\overrightarrow{M'B} + \lambda_3\overrightarrow{M'C} + \lambda_4\overrightarrow{M'M} = \vec{0}$. On en déduit $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\overrightarrow{M'I_{\underline{\lambda}}} + \lambda_4\overrightarrow{I_{\underline{\lambda}}M} = \vec{0}$, ce qui équivaut à $\overrightarrow{I_{\underline{\lambda}}M'} = \lambda_4\overrightarrow{I_{\underline{\lambda}}M}$.
   Conclusion: $f_{\underline{\lambda}}$ est une homothétie de centre $I_{\underline{\lambda}}$ et de rapport λ_4. Cette homothéthie est une isométrie si et seulement si on a $|\lambda_4| = 1$. Comme $\lambda_4 \neq 1$, on en déduit ici que $f_{\underline{\lambda}}$ est une isométrie si et seulement si $\lambda_4 = -1$.
   Ainsi, pour $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2$, en posant $\lambda_4 = -1$, on obtient une isométrie qui est en fait une symétrie centrale de centre $I_{\underline{\lambda}}$.

   b) Pour $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$, faire un dessin du triangle ABC et de son image $A'B'C'$ par $f_{\underline{\lambda}}$.

   Solution: D'après la question a) ci-dessus, on a ici une symétrie centrale de centre le point I, barycentre des points A, B et C affectés des poids respectifs 1, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$. On constate (par associativité du barycentre) que si J est le milieu du segment $[B, C]$, alors I est le milieu du segment $[A, J]$. Le point I étant construit, on en déduit facilement A' B' C', d'où la figure suivante:



2. On suppose que $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in U$ et $\lambda_4=1$.

   Pour $M,N\in\mathcal{P}$, on pose $M'=f_{\underline{\lambda}}(M)$, $N'=f_{\underline{\lambda}}(N)$. Montrer que $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{M'N'}$.
   En déduire que $f_{\underline{\lambda}}$ est une isométrie. Préciser la nature de cette isométrie.

   Solution: Si $\lambda_4=1$, alors on a $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$. Dans ce cas, quels que soient les points M_1 et M_2 de $\mathcal{P}$, on a $\lambda_1\overrightarrow{M_1A}+\lambda_2\overrightarrow{M_1B}+\lambda_3\overrightarrow{M_1C}=\lambda_1\overrightarrow{M_2A}+\lambda_2\overrightarrow{M_2B}+\lambda_3\overrightarrow{M_2C}$ (je vous en laisse la vérification). Soient M, N deux points du plan. Comme $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=1$, on sait que les points $M'=f_{\underline{\lambda}}(M)$, $N'=f_{\underline{\lambda}}(N)$ sont bien définis.
   On en déduit que $\lambda_1\overrightarrow{M'A}+\lambda_2\overrightarrow{M'B}+\lambda_3\overrightarrow{M'C}=\lambda_1\overrightarrow{N'A}+\lambda_2\overrightarrow{N'B}+\lambda_3\overrightarrow{N'C}$.
   Par définition de M' et N' nous avons $\lambda_1\overrightarrow{M'A}+\lambda_2\overrightarrow{M'B}+\lambda_3\overrightarrow{M'C}+\lambda_4\overrightarrow{M'M}=\vec{0}$ et $\lambda_1\overrightarrow{N'A}+\lambda_2\overrightarrow{N'B}+\lambda_3\overrightarrow{N'C}+\lambda_4\overrightarrow{N'N}=\vec{0}$. On en déduit que $\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{N'N}$ $(\lambda_4=1)$, ce qui équivaut à $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$. Il est alors immédiat que $f_{\underline{\lambda}}$ est une isométrie. Cette isométrie est en fait une translation. Il suffit de calculer par exemple $f_{\underline{\lambda}}(A)$ pour préciser le vecteur $\vec{v_{\underline{\lambda}}}$ de cette translation. On trouve donc que $f_{\underline{\lambda}}$ est une translation de vecteur $\vec{v_{\underline{\lambda}}}=\lambda_2\overrightarrow{AB}+\lambda_3\overrightarrow{AC}$.

3. Conclure.

   Solution: $f_{\underline{\lambda}}$ est une isométrie si et seulement si $\lambda_4=\pm 1$.
